Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations

Nicolas Bacaer

Institut de Recherche pour le Développement – UR 079
32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy cedex, France
mel : bacaer@bondy.ird.fr

Résumé. Cette note présente le lien entre le choix d'une rotation tenant compte de « l'effet précédent » et des modèles mathématiques relevant de la théorie des graphes. Dans un premier modèle, le revenu de l'année n dépend seulement des cultures des années n et n-1. Dans un deuxième modèle, le revenu de l'année n dépend des cultures des années n, n-1 et n-2. Le problème est de choisir une rotation qui optimise le revenu annuel moyen.

1. Historique

Des modèles mathématiques pour l'optimisation des systèmes de culture ont été introduits dans les années 1960 par des économistes. Ils ont formulé plusieurs problèmes traditionnels, par exemple le choix du pourcentage de la surface agricole à attribuer aux différentes cultures (l'assolement), comme des problèmes de « programmation linéaire », une théorie mathématique développée par Dantzig (1963). La théorie s'accompagne d'un algorithme appelé « méthode du simplexe » qui nécessite l'usage d'un ordinateur. Des applications agricoles se trouvent par exemple dans le livre de Boussard et Daudin (1988). Un logiciel destiné aux agriculteurs a été développé par le CEMAGREF (1992).
Dans ces références, le problème du choix de la rotation est insuffisamment étudié. On présente donc dans cette note des modèles mathématiques pour l'optimisation de ces rotations tenant compte essentiellement de « l'effet précédent ». Aux rotations correspondent des cycles dans des graphes. Jusqu'à présent, ils étaient étudiés en vue d'applications très différentes : problèmes de transport, problèmes d'automatique dans des chaînes de montage (Baccelli & al. 1992), etc. Il existe un algorithme très efficace pour résoudre ces problèmes, appelé algorithme de Howard, qui est d'ailleurs implémenté dans un logiciel de l'INRIA.

2. Premier modèle

Considérons un agriculteur qui veut cultiver une parcelle, et pour laquelle il peut choisir chaque année entre P cultures différentes : blé, orge, navet, jachère, etc. Supposons que le revenu de l'année n dépende seulement des cultures des années n et n-1. Notons donc x_n la culture de l'année n, et $K(x_{n-1},x_n)$ le revenu de l'année n.
Considérons maintenant un graphe à P « sommets », chaque sommet correspondant à une culture, avec des flèches reliant tous les sommets entre eux (y compris les flèches reliant un sommet à lui-même). A la flèche qui va du sommet i au sommet j est associé le « poids » K(i,j). Une rotation, c'est-à-dire une suite périodique de cultures, correspond alors à un cycle dans le graphe. La meilleure rotation $x_0,x_1,\dots,x_{L-1},x_0$ sera alors celle qui optimise le revenu annuel moyen

$$(K(x_0,x_1) + K(x_1,x_2) + \dots + K(x_{L-1},x_0)) / L.$$

On se rend compte assez facilement qu'il suffit de se restreindre aux cycles élémentaires, c'est-à-dire à ceux qui ne passent pas deux fois par le même « sommet », car les autres cycles sont en fait composés de cycles élémentaires et ne peuvent pas engendrer un revenu annuel moyen supérieur. Cette propriété montre déjà les limites de ce modèle, car en pratique, de nombreuses rotations contiennent plusieurs fois la même culture. Dans la région du Noyonnais en France par exemple, une douzaine de rotations différentes ont été recensées (Sébillotte, 1989). Certaines, telle la rotation betterave – pomme de terre – blé, sont compatibles avec notre premier modèle. D'autres, telle la rotation betterave – blé – blé, ne le sont pas. Cette critique sera levée dans le deuxième modèle.
Revenons au premier modèle. Une manière de trouver la rotation optimale est de faire la liste de toutes les rotations élémentaires : il y en a P(P-1)…(P-L+1)/L qui sont de longueur L, avec L entre 1 et P. Pour P= 3 cultures, il y en a 3 de longueur 1 (monocultures), 3 de longueur 2 (les rotations biennales 1-2, 1-3 et 2-3) et 2 de longueur 3 (les rotations triennales 1-2-3 et 1-3-2), soit 8 au total. En fait, le nombre total de rotations élémentaires croît très vite avec P (il y en a 24 pour P=4, 89 pour P=5 …), ce qui rend cette méthode assez laborieuse. Les spécialistes de théorie des graphes se sont rendu compte qu'il était plus rapide de résoudre le système d'équations (i variant de 1 à P)

$$\mathrm{Max}_{j=1..P} \{ K(i,j)+u(j) \} = R + u(i) \qquad (*)$$

où les inconnues sont les nombres u(1),…,u(P) et R, au moyen de l'algorithme de Howard. Cet algorithme est implémenté dans une boîte à outils disponible sur ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Meta2/Scilab/contrib/MAXPLUS et utilisable au sein du logiciel scilab (http://www-rocq.inria.fr/scilab). La théorie montre que R ne peut prendre qu'une valeur bien déterminée, qui est en fait le revenu annuel moyen maximal. On choisit ensuite pour tout i=1..P un nombre j=c(i) réalisant le maximum dans le membre de gauche de l'équation numéro i ci-dessus. Une rotation optimale s'obtient en partant d'un x_0 quelconque puis en prenant par récurrence $x_n=c(x_{n-1})$. La suite devient périodique au bout de quelques itérations, et la rotation obtenue est optimale.
Les nombres u(1),…,u(P) ont une interprétation. Ils forment un système de prix pour l'achat et la vente de la parcelle. Si la culture i a été cultivée juste avant la transaction, alors u(i) est le juste prix de cette transaction. On effet, ce système de prix assure que le revenu annuel moyen maximal reste le même d'un exploitant à l'autre Autrement dit, le revenu sur n années tenant compte de l'achat $-u(x_0)$ et de la vente $+u(x_n)$, qui est égal à

$$(\mathrm{Max}_{x1…xn} \{ K(x_0,x_1) + K(x_1,x_2) + \dots + K(x_{n-1},x_n) + u(x_n) \} – u(x_0)) / n,$$

est indépendant de x_0 et de n.
Signalons enfin le lien avec le problème de l'assolement et la programmation linéaire. Supposons que la parcelle puisse être divisée pour accueillir différentes cultures. Soit $r_n(i,j)$ le pourcentage de la surface cultivé avec j l'année n et avec i l'année n-1. Supposons que $x_0,x_1,…,x_{L-1}$ soit une rotation optimale. On peut montrer que le revenu annuel moyen maximal R peut aussi être obtenu en choisissant chaque année $r_n(i,j)=r(i,j)=1/L$ si $i=x_{k-1}$ et $j=x_k$ pour une valeur de k (avec $x_L=x_0$), c'est-à-dire en découpant la parcelle en L plus petites parcelles de même surface accueillant les

cultures de la rotation optimale. Par conséquent, R est aussi la valeur du problème de programmation linéaire

Max Somme_i,j K(i,j) r(i,j)

avec les contraintes r(i,j)>=0, Somme_i Somme_j r(i,j)=1, et Somme_j r(j,i)=Somme_j r(i,j).

3. Deuxième modèle

Supposons maintenant que le revenu de l'année n dépende des cultures des années n, n-1 et n-2. Soit $K(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$ le revenu de l'année n. Considérons un graphe à P^2 « sommets », chaque sommet correspondant à un couple de cultures, ce couple représentant les cultures de deux années consécutives. Les flèches ne relient que les sommets tels que la seconde culture du sommet de départ soit la même que la première culture du sommet d'arrivée. Si la flèche va de (i,j) à (j,k), alors son « poids » est K(i,j,k). Une rotation, c'est-à-dire une suite périodique de cultures, correspond alors à un cycle dans le graphe. La meilleure rotation $x_0,x_1,\ldots,x_{L-1},x_0$ sera alors celle qui optimise le revenu annuel moyen. On se rend compte comme dans le premier modèle qu'il suffit de se restreindre aux cycles élémentaires, c'est-à-dire à ceux qui ne passent pas deux fois par le même « sommet ».
Prenons par exemple P=2. Il y a 4 sommets : (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). Partant de (1,1), il y a 2 flèches : l'une vers (1,1) de « poids » K(1,1,1), l'autre vers (1,2) de « poids » K(1,1,2). Le cycle élémentaire (1,1)-(1,2)-(2,1) correspond à la rotation triennale 1-1-2, qui n'est pas élémentaire au sens du premier modèle. Pour modéliser des rotations telles que celle sur six ans betterave-blé-betterave-blé-pomme de terre-blé, qui n'est pas élémentaire au sens du deuxième modèle, il faudrait avoir recours à un modèle avec 3 années de « mémoire ». Heureusement, le deuxième modèle permet déjà de rendre compte de la plupart des rotations recensées dans le livre de Sébillotte (1989).
Contrairement au premier modèle, il est assez difficile de compter le nombre de cycles élémentaires. Pour P=2, il y en a 6, qui sont 1, 2, 1-2, 1-1-2, 1-2-2 et 1-1-2-2. Pour P=3, il y en a 148, pour P=4, il y en a 120538 ! Ce nombre croît extrêmement vite ; nous avons utilisé un programme informatique basé sur l'algorithme de Tiernan (1970) pour les compter. Pour obtenir une rotation optimale, on doit utiliser l'algorithme de Howard pour une équation du même type que (*), mais légèrement plus compliquée.

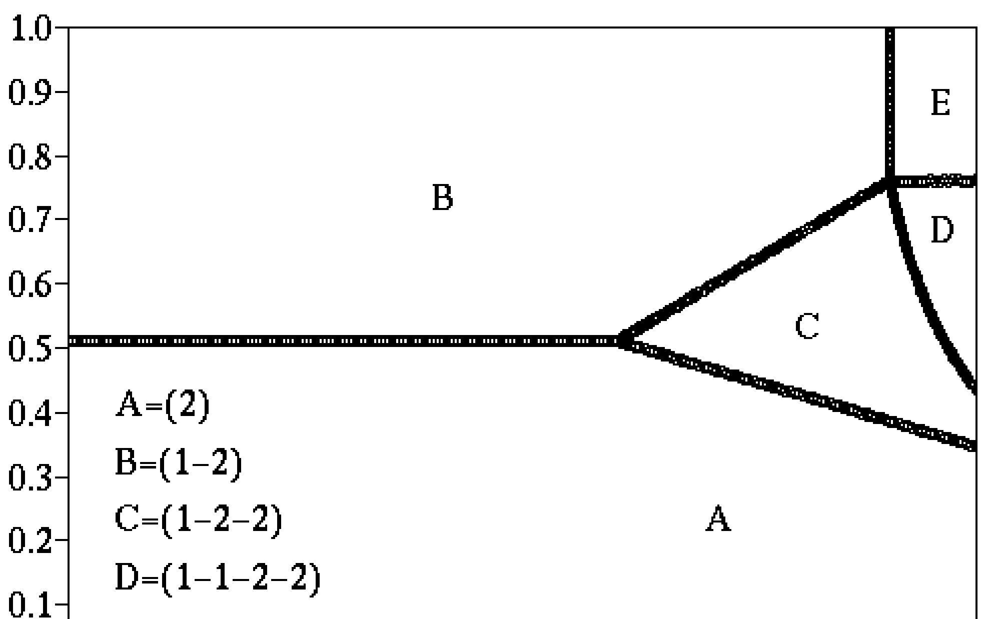
4. Exemple

Prenons P=2, avec 1 représentant la jachère et 2 représentant une céréale. Supposons que le revenu K puisse être décomposé en

$$K(x_{n-2},x_{n-1},x_n) = b(x_{n-2})\, a(x_{n-1})\, Q(x_n).$$

$Q(x_n)$ représente une sorte de revenu maximum théorique associé à la culture x_n. Les deux nombres $a(x_{n-1})$ et $b(x_{n-2})$ sont compris entre 0 et 1 et représentent l'effet précédent et l'effet anté-précédent. Comme exemple numérique, on a pris Q(1)=0,

comme il se doit pour une jachère, R(2)=20 (l'unité importe peu ici), a(2)=0.25 (la céréale épuise le sol) et b(2)=0.6 (ces valeurs peuvent être critiquées). On laisse a(1) et b(1) varier entre 0 et 1. En effet, la fertilité du sol après la jachère dépend beaucoup du travail de l'agriculteur. Dans l'antiquité et durant le moyen-âge (Mazoyer & al. 1997), ce n'était que pendant la période de jachère que la fertilisation avec les excréments du bétail était possible. Ainsi, on s'attend à ce qu'en augmentant a(1) ou b(1), la solution optimale de l'antiquité, à savoir la rotation biennale céréale-jachère, soit remplacée par la solution optimale du moyen-âge, à savoir la rotation triennale jachère-céréale-céréale. La figure montre le résultat des calculs. L'axe vertical représente a(1), l'axe horizontal b(1). Pour chaque valeur de a(1) et b(1) entre 0 et 1, on calcule la rotation optimale avec l'algorithme de Howard. Pour de grandes zones dans le diagramme, cette rotation est la même ; c'est pourquoi dans notre programme, on se contente de rechercher la limite de ces zones par une méthode de dichotomie. Dans la zone A, c'est la monoculture de la céréale qui est optimale ; dans la zone B, c'est la rotation jachère-céréale ; dans la zone C, c'est la rotation jachère-céréale-céréale ; dans la zone D, c'est la rotation jachère-jachère-céréale-céréale ; dans la zone E, c'est la rotation jachère-jachère-céréale.
On peut voir sur la figure que la transition de systèmes de culture au moyen-âge correspond au passage de la zone B à la zone C. Dans le cadre de ce modèle et vu la figure, il semble que la transition soit due à un accroissement de b(1) plus que de a(1). Cela signifie que la contribution principale n'est pas l'effet précédent mais l'effet anté-précédent. D'ailleurs, remarquons que dans le cadre du premier modèle (qui ne tient compte que de l'effet précédent), on ne peut pas expliquer la transition. En effet, même si on distingue une céréale de printemps 2 et une céréale d'hiver 3, puisqu'il faut au moins 3 cultures dans le premier modèle pour avoir une rotation optimale triennale, il n'est pas possible qu'en augmentant K(1,2) et K(1,3), le revenu moyen (K(1,2)+K(2,3))/3 devienne supérieur à K(1,2)/2.



Références

- G.B. Dantzig (1963). Linear programming and extensions. Princeton University Press.
- J.M. Boussard et J.J. Daudin (1988). La programmation linéaire dans les modèles de production. Masson, Paris.
- CEMAGREF (1992). GEDE, logiciel d'aide à la décision stratégique pour l'exploitation agricole. Etudes du CEMAGREF, Série « Production et économie agricoles » no.1, Paris.
- F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat (1992). Synchronization and linearity. John Wiley, Chichester.
- M. Sébillotte (1989). Fertilité et systèmes de production. INRA, Paris.
- J.C. Tiernan (1970). An efficient search algorithm to find the elementary circuits of a graph. Communications of the ACM, vol.13, pp.722-726.
- M. Mazoyer et L. Roudart (1997). Histoire des agricultures du monde. Editions du Seuil, Paris.