Sur la persistance dans des modèles épidémiques périodiques qui dépendent de la durée depuis l'infection ou avec des périodes d'infection fixes *

Carlota Rebelo et Alessandro Margheri †

Fac. Ciências da Univ. de Lisboa e Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, Campo Grande, Edifício C6, piso 2, P-1749-016 Lisboa Portugal

courriels: mcgoncalves@fc.ul.pt et margheri@ptmat.fc.ul.pt

Nicolas Bacaër

Institut de Recherche pour le Développement et Université Paris 6, Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Bondy, France

courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

Résumé

De nombreux travaux récents se sont focalisés sur la persistance pour des modèles épidémiques à coefficients périodiques. Mais le cas où les compartiments infectés vérifient une équation différentielle à retard ou une équation aux dérivées partielles ne semble pas avoir été étudié jusqu'à présent. L'objectif de cet article est de fournir un cadre pour démontrer la persistance dans un pareil cas. On présente quelques exemples, tels qu'un modèle SIR périodique structuré par la durée depuis l'infection et un modèle SIS périodique avec un retard.

1 Introduction

De nombreux travaux ont déjà étudié la persistance en biologie des populations [23], et en particular en épidémiologie. L'attention s'est naturellement portée sur les modèles autonomes. Mais pour de nombreuses maladies infectieuses, transmises par voie aérienne ou par des vecteurs, il est beaucoup plus réaliste d'inclure de la saisonnalité sous le forme de coefficients périodiques. [28, 20] ont par exemple étudié la persistance dans des modèles épidémiques périodiques. Les modèles mathématiques dans

*Discr. Cont. Dynam. Syst. Ser. B 19 (2014) 1155-1170.

†Soutenus par la Fundação para a Ciência e Tecnologia, PEst, OE/MAT/UI0209/2011 et le projet PTDC/MAT/113383/2009

ces références sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires. La question demeure de savoir si l'on peut adapter les techniques développées dans ce cadre pour démontrer la persistance pour d'autres types de modèles. En particular, on s'intéresse dans cet article à des modèles où les compartiments infectés vérifient une équation différentielle à retard ou une équation aux dérivées partielles. À vrai dire, des équations différentielles périodiques à retard ont été déjà beaucoup étudiées il y a quelques décennies, à la suite du modèle SIS à retard de Cooke et Kaplan [7, 21, 18, 19]. Il semblerait néanmoins que la persistance dans ce modèle, lorsque la reproductivité R_0 est supérieure à 1, soit toujours une question ouverte.

La section 2 présente le cadre abstrait que l'on va utiliser pour démontrer la persistance. Bien qu'on sache que d'autres approches sont possibles pour démontrer la persistance pour les modèles que l'on considère (voir [23]), on a choisi de présenter ce résultat abstrait car on pense qu'il peut être intéressant en lui-même.

Dans la section 3, on applique ce cadre à un modèle SIR périodique structuré par la durée depuis l'infection. C'est une simple variante du modèle épidémique original de Kermack et McKendrick. À vrai dire, on obtient nos résultats pour la formulation intégrale de Volterra de ce modèle, un cadre plus faible qui convient pour des conditions initiales plus générales. Les résultats obtenus avec cette formulation (extinction ou persistance de la maladie, voir les propositions 1 et 2) pourraient aussi être déduits de l'approche par semi-groupe intégré comme dans [17].

La section 4 considère le modèle SIS avec retard de Cooke et Kaplan. On peut trouver d'autres exemples de modèles épidémiques périodiques sous la forme d'équations aux dérivées partielles ou d'équations différentielles à retard dans les compartiments infectés dans [4, 5]. On peut démontrer la persistance dans ces exemples en suivant le même cadre.

2 Théorème abstrait

Dans cet article, en suivant les lignes de [10], on considère un système dynamique défini sur un espace métrique (X,d), où d est la distance dans X. On entend par cela une application $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$, $\pi(x,t) = xt$ qui est continue et telle que $x0 = x$ et $x(t_1+t_2) = (xt_1)t_2$, pour tout $x \in X$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Notre but est de donner un résultat facilement utilisable sur la persistance uniforme lorsque l'espace X n'est pas localement compact.

Rappelons que $S \subset X$ est un répulseur uniforme s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X \setminus S$ on ait $\liminf_{t\to+\infty} d(\pi(x,t),S) \geq \delta$. On dit que le système dynamique est uniformément persistant par rapport à S si S est un répulseur uniforme. On dit qu'un ensemble $\Omega \subset X$ est (positivement) invariant si pour tout $x \in \Omega$ l'orbite positive $\gamma^+(x) = \{xt : t \geq 0\}$ est contenue dans Ω. Un sous-ensemble invariant compact maximal de X est un ensemble invariant compact A tel que tout sous-ensemble invariant compact de X soit contenu dans A. Un attracteur compact global est un sous-ensemble A qui est un sous-ensemble invariant compact maximal de X qui attire tout sous-ensemble borné $B \subset X$ [12]. On dit enfin qu'un ensemble M est isolé s'il existe un voisinage fermé U de M tel que M soit le plus grand ensemble invariant de U. Étant donné un

ensemble M, on note $W^s(M)$ l'ensemble stable de M, c'est-à-dire l'ensemble $W^s(M) = \{x \in X : \lim_{t\to+\infty} d(xt, M) = 0\}$.

Les auteurs de [14] exposent un théorème [14, théorème 4.1] qui garantit la persistance uniforme pour les applications définies sur un espace métrique et qui admettent un attracteur global. Ce théorème est une conséquence d'un résultat qui caractérise les répulseurs dans les espaces compacts [14, théorème 2.1] et qui résulte d'un théorème d'Ura et Kimura (voir [14] pour les détails). Les auteurs de [13] ont démontré une version de [14, théorème 2.1] pour les flots. De même, on peut obtenir la version suivante de [14, théorème 4.1] pour les systèmes dynamiques :

Théorème 1 *Soit S un sous-ensemble fermé de X tel que $X \setminus S$ soit positivement invariant. Supposons que X ait un attracteur compact global A et que, en notant M l'ensemble invariant compact maximal dans S, on ait*

a_1) M est isolé dans A,

a_2) $W^s(M) \subset S$.

Alors π est uniformément persistant par rapport à S.

On va utiliser le théorème 1 pour démontrer une version du théorème de Fonda sur l'existence de répulseurs [10] pour des espaces métriques qui ne sont pas localement compacts. Ce théorème permettra de démontrer la persistance pour des modèles avec des équations aux dérivées partielles ou des équations différentielles à retard dans les compartiments infectés.

Théorème 2 *Soit S un sous-ensemble fermé de X tel que $X \setminus S$ soit positivement invariant. Supposons que*

i) X ait un attracteur compact global A ;

ii) il existe un voisinage fermé V de S et une fonction continue $P : X \to \mathbb{R}^+$ telle que

a) $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in S$;

b) $\forall x \in V \setminus S \ \exists T_x > 0 : \ P(xT_x) > P(x)$.

Alors π est uniformément persistant par rapport à S.

Preuve. On va démontrer ce théorème en utilisant le théorème 1 et en suivant les mêmes étapes que dans la preuve de [14, corollaire 2.3]. Démontrons que les conditions $i)$ et $ii)$ ci-dessus impliquent les hypothèses (a_1) et (a_2) du théorème 1. Soit M un ensemble invariant compact maximal dans S. Démontrons que M est isolé dans A. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout voisinage fermé U de M dans A, M n'est pas le plus grand ensemble invariant dans U. Comme V est un voisinage fermé de S et $M \subset S$, on voit que $W := V \cap A$ est un voisinage fermé de M dans A. Donc il y a un ensemble invariant N tel que $M \subsetneq N \subset W$. Soit $x \in N \setminus M$. L'adhérence de l'orbite positive $\gamma^+(x)$ est telle que $\overline{\gamma^+(x)} = \overline{\{xt : t \geq 0\}} \subset \overline{N} \subset W$; c'est donc un ensemble compact. Il existe donc $y \in \overline{\gamma^+(x)}$ tel que $P(y) \geq P(z)$ pour tout $z \in \overline{\gamma^+(x)}$. Si $P(y) = 0$, on obtient $P(z) = 0$ pour tout $z \in \overline{\gamma^+(x)}$. Donc $\gamma^+(x) \subset W \subset V$ et $P(z) = 0$ pour tout $z \in \gamma^+(x)$; l'hypothèse $ii)a)$ implique que $\gamma^+(x) \subset S$. Comme $x \notin M$, on arrive à une contradiction avec le fait que M soit un ensemble compact invariant maximal dans S. En effet, $P(y) > 0$, c'est-à-dire $y \notin S$ et $P(yt) \leq P(y)$ pour tout $t \geq 0$. Ceci contredit

$ii)b)$. De cette manière, on conclut qu'un pareil N n'existe pas, de sorte que W est un voisinage isolant de M dans A.

Supposons maintenant qu'il existe $x \notin S$ tel que $x \in W^s(M)$. Ainsi il existe $x \in V \setminus S$ tel que $\gamma^+(x) \subset V$. Comme M est compact et $x \in W^s(M)$, on a que $\gamma^+(x)$ est précompact. Ainsi, comme ci-dessus, il existe $y \in \overline{\gamma^+(x)}$ tel que $P(y) \geq P(z)$ pour tout $z \in \overline{\gamma^+(x)}$. On arrive comme ci-dessus à une contradiction. On conclut que $W^s(M) \subset S$.

3 Un modèle SIR

On étudie dans cette section le modèle SIR périodique suivant, où l'on suppose que le taux de contact dépend du temps écoulé depuis l'infection, que l'on note x :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) = b(t) - S(t)\int_0^\infty c(t,x)I(t,x)\,dx - d(t)S(t) \\ \\ I(t,0) = S(t)\int_0^\infty c(t,x)I(t,x)\,dx \\ \\ \frac{\partial I}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial I}{\partial x}(t,x) = -r(t,x)I(t,x) - d(t)I(t,x) \\ \\ \frac{dR}{dt}(t) = \int_0^\infty r(t,x)I(t,x)\,dx - d(t)R(t). \end{cases} \tag{1}$$

On suppose dans ce modèle que les naissances $b(t)$, la mortalité $d(t)$ et le taux de guérison $r(t,x)$ sont tous des fonctions continues positives ou nulles qui ne sont pas identiquement nulles et qui sont T-périodiques par rapport à t. En ce qui concerne le taux de contact $c(t,x)$, on suppose qu'il est positif ou nul, T-périodique par rapport à t et qu'il existe x_0 tel que $c(t,x) > 0$ pour tout $x \geq x_0$, $t \in \mathbb{R}$. Avec cette hypothèse, les maladies avec une période de latence sont aussi couvertes. On suppose enfin que le taux de contact $c(t,x)$ est borné et uniformément continu sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et que $r(t,x)$ est borné sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

[17] a étudié les propriétés de stabilité globale pour la version autonome de ce modèle en utilisant une approche de semi-groupe. Ici, au lieu de proposer un cadre analogue pour le cas périodique en temps ou d'essayer d'adapter celui de [16] pour les modèles de population périodiques en temps et structurés par âge, on a préféré l'approche équivalente et un peu plus simple qui passe par la formulation sous forme d'équation intégrale de Volterra. Dans la formulation de Volterra du modèle (1), l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre est remplacée par l'équation (3), d'après la méthode des caractéristiques ; cette dernière équation a un sens pour des conditions initiales plus générales. Les solutions de la formulation intégrale de Volterra sont les solutions faibles de (1). Bien sûr, des conditions initiales plus régulières conduiraient à une solution classique du système (1) (voir la remarque 1 pour plus de détails). Le semi-groupe que l'on obtient dans le cadre de Volterra peut aussi s'obtenir dans l'approche de semi-groupe intégré. Sur ce point, on signale que l'équation (5) dans la remarque 1 est une partie de la définition d'une solution faible dans le cadre des semi-groupes intégrés.

En ce qui concerne la persistance, elle a été étudiée pour une version plus générale mais autonome du modèle dans [6]. Dans cette section, on montre que dans le cadre

faible mentionné ci-dessus, le système SIR (1) présente le seuil attendu par rapport au paramètre R_0, qui est la reproductivité (on rappelle ci-dessous sa définition dans le cadre périodique en temps) : l'infection disparaît si $R_0 < 1$ et persiste si $R_0 > 1$ (voir les propositions 1 et 2 ci-dessous). Dans les deux cas, le comportement des trajectoires du système linéarisé près de l'orbite périodique sans maladie sera important. Pour ce système, qui doit aussi être considéré au sens faible, la position de R_0 par rapport à 1 détermine la position de sa borne de croissance exponentielle par rapport à 0. Par conséquent, on peut obtenir de l'information sur le comportement des orbites du système (1) par comparaison avec les trajectoires du système linéarisé près de l'orbite périodique sans maladie. Si $R_0 < 1$ alors la technique de comparaison est suffisante pour démontrer la proposition 1. Le cas $R_0 > 1$ est plus compliqué. Pour démontrer la proposition 2, on va appliquer le théorème 2 ; une grande partie de cette section est consacrée à la vérification des hypothèses de ce théorème. À ce sujet, on observe que la technique de comparaison mentionnée ci-dessus sera utilisée pour démontrer par l'absurde que l'hypothèse $ii\,b)$ du théorème 2 est vérifiée.

La structure de cette section suit les lignes tracées ci-dessus. En particulier, on présente la formulation de (1) comme une équation intégrale de Volterra et les propriétés du système linearisé près de la solution périodique sans maladie.

On notera $L^1_+(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions positives ou nulles intégrables au sens de Lebesgue sur le demi-axe positif.

Formulation du modèle comme une équation intégrale de Volterra. On considérera des conditions initiales de la forme

$$S(t_0) = S_0, \quad I(t_0,x) = I_0(x) \quad R(t_0) = 0,$$

avec $t_0 \in \mathbb{R},\ S_0 > 0$ et

$$\int_0^\infty I_0(x)\,dx > 0. \tag{2}$$

Avec la formulation du modèle comme une équation intégrale de Volterra, on peut montrer, comme dans [27] (voir aussi [26]) que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\hat{z}_0 := (S_0, I_0(\cdot)) \in \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$, il existe une unique solution faible

$$z(t;(\hat{z}_0,t_0)) := (S(t;(\hat{z}_0,t_0)), I(t,x;(\hat{z}_0,t_0)), \qquad t \geq t_0$$

du système (1), c'est-à-dire une application $(t,(\hat{z}_0,t_0)) \to z(t,(\hat{z}_0,t_0)) : [t_0,+\infty[\to \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$ qui est une fonction continue de $t \geq t_0$ et telle que $I(t,x;(\hat{z}_0,t_0))$ vérifie :

$$I(t,x;(\hat{z}_0,t_0)) = \begin{cases} I_0(x-t+t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t [r(s,s-t+x)+d(s)]ds}, & x \geq t-t_0 \\ u(t-x)\mathrm{e}^{-\int_{t-x}^t [r(s,s-t+x)+d(s)]ds}, & 0 \leq x < t-t_0, \end{cases} \tag{3}$$

où les fonctions $u(\cdot;(\hat{z}_0,t_0))$ et $S(;(\hat{z}_0,t_0))$ sont les solutions continues, pour $t \geq t_0$, du système d'équations intégrales de Volterra

$$\begin{cases} u(t) = S(t)\int_0^{t-t_0} c(t,x)\mathrm{e}^{-\int_{t-x}^{t}[r(s,s-t+x)+d(s)]ds}u(t-x)dx+ \\ \qquad +S(t)\int_{t-t_0}^{+\infty} c(t,x)I(t,x)dx \\ S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)ds - \int_{t_0}^{t} u(s)ds - \int_{t_0}^{t} d(s)S(s)ds. \end{cases} \tag{4}$$

Remarque 1 *Notons que la solution faible de (1) est telle que $S(t)$ soit en fait continûment différentiable sur $[t_0,+\infty[$ et telle que la fonction $\mathscr{I}(t,x) = \int_{t_0}^{t} I(s,x)\,ds$ vérifie l'équation*

$$I(t,x) - I_0(x) + \frac{\partial \mathscr{I}(t,x)}{\partial x} = -\int_{t_0}^{t}[r(s,x)+d(s)]I(s,x)\,ds, \quad p.p.\ x \geq 0,\ pour\ tout\ t \geq t_0. \tag{5}$$

De plus, on remarque que la fonction $t \to \int_0^{+\infty} I(t,x)\,dx$ est continûment différentiable sur $[t_0,+\infty[$. Cette dernière propriété, qui sera utile pour démontrer que le système (1) est dissipatif, résulte facilement de (3) une fois qu'on a fait les changements de variables $s = t-x$ et $s = x-t+t_0$ respectivement dans l'intégrale $\int_0^{t-t_0}$ et dans l'intégrale $\int_{t-t_0}^{+\infty}$ (des calculs analogues mènent à (5)). Les propriétés de différentiabilité de $I(t,x)$ dépendent de la régularité de $I_0(x)$. Cependant, même si la fonction $I_0(x)$ est régulière, la solution $I(t,x)$ n'est pas continue le long de la ligne caractéristique $t = t_0 + x,\ t \geq t_0$, si l'on n'impose pas de condition de compatibilité additionnelle sur I_0.

Le système linéarisé près de la solution périodique sans maladie. La solution sans maladie est l'unique solution positive périodique $S^*(t)$ de

$$\frac{dS^*}{dt}(t) = b(t) - d(t)S^*(t).$$

Le système linéarisé près de la solution sans maladie est

$$\begin{cases} i(t,0) = S^*(t)\int_0^{\infty} c(t,x)\,i(t,x)\,dx \\ \frac{\partial i}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial i}{\partial x}(t,x) = -\left[r(t,x)+d(t)\right]i(t,x). \end{cases} \tag{6}$$

Bien que l'on conserve pour simplifier la notation avec l'équation aux dérivées partielles, on considère en réalité tous les systèmes de cette section au sens faible de la formulation intégrale de Volterra. Comme dans [4], la reproductivité R_0 du système (1) est par définition le rayon spectral de l'opérateur intégral

$$u(t) \mapsto \int_0^{\infty} K(t,x)\,u(t-x)dx$$

sur l'espace des fonctions continues T-périodiques avec le noyau

$$K(t,x) = S^*(t)\,c(t,x)\,\mathrm{e}^{-\int_{t-x}^{t}[r(s,s-t+x)+d(s)]\,ds}. \tag{7}$$

Cet opérateur est compact [3, appendice 1]. Rappelons avec [4] et [3, corollaires 1 et 2] que la position de R_0 par rapport à 1 détermine la position de la borne de croissance exponentielle par rapport à 0. En particulier, $R_0 < 1$ implique que toute solution $i(t,x)$ de (6) vérifie $\int_0^\infty i(t,x)\,dx \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Si $c(t,x) = c(t)$ et $r(t,x) = r(t)$, alors $R_0 = (\int_0^T S^*(t)c(t)dt)/(\int_0^T (r(t)+d(t))dt)$ d'après [4]. Mais à part ce cas spécial, R_0 ne peut pas être calculé en prenant simplement la moyenne des coefficients du modèle.

On est maintenant prêt pour énoncer et démontrer un premier résultat.

Proposition 1 *Si $R_0 < 1$ et si (S,I,R) est une solution de (1), alors $\int_0^\infty I(t,x)\,dx \to 0$ quand $t \to +\infty$.*

Preuve. Supposons que $R_0 < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit R_ε la reproductivité associée au noyau $K_\varepsilon(t,x)$ semblable à (7) sauf que $S^*(t)$ est remplacé par $S^*(t)+\varepsilon$. D'après la semicontinuité supérieure du spectre [15, chap. 4, p.208], il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que $R_{\varepsilon^*} < 1$. Soit (S,I,R) une solution de (1). Alors

$$\frac{dS}{dt} \le b(t) - d(t)\,S(t)$$

pour tout $t \ge t_0$. Donc il existe $t_1 \ge t_0$ tel que $S(t) \le S^*(t)+\varepsilon^*$ pour tout $t \ge t_1$. Donc pour tout $t \ge t_1$,

$$I(t,0) \le (S^*(t)+\varepsilon^*)\int_0^\infty c(t,x)I(t,x)\,dx, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = -\big[r(t,x)+d(t)\big]\,I(t,x).$$

Comme par exemple dans [1, p. 25], on obtient $I(t,x) \le j(t,x)$ pour tout $t \ge t_1$, où $j(t_1,x) = I(t_1,x)$ et

$$j(t,0) = (S^*(t)+\varepsilon^*)\int_0^\infty c(t,x)\,j(t,x)\,dx, \quad \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = -\big[r(t,x)+d(t)\big]\,j(t,x),$$

pour tout $t > t_1$. Mais comme $R_{\varepsilon^*} < 1$, [3, corollaires 1 et 2] montre que $\int_0^\infty j(t,x)\,dx \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donc $\int_0^\infty I(t,x)\,dx \to 0$ quand $t \to +\infty$.

□

Le cas $R_0 > 1$. Pour être dans le cadre du théorème 2, on étend l'espace de phase en posant $X := \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+) \times S^1$, où le cercle unité S^1 est identifié avec $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. La périodicité en t des fonctions a, c, f et d implique que pour tout $\hat{z}_0 := (S_0, I_0(\cdot)) \in \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+)$, $t_0 \in S^1$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{Z}$,

$$z(t_0 + lT + \tau; (\hat{z}_0, t_0 + lT)) = z(t_0 + \tau; (\hat{z}_0, t_0)).$$

On peut ainsi définir un système dynamique $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$ tel que

$$\pi((\hat{z}_0, t_0), \tau) = (z(t_0+\tau; (\hat{z}_0, t_0)), (t_0+\tau) \mod T).$$

Nous considérons enfin le sous-ensemble fermé suivant de X comme candidat pour être répulseur

$$S := \mathbb{R}^+ \times \{I \in L^1_+(\mathbb{R}^+) : I(x) = 0,\ p.p.\ sur\ [0,+\infty[\} \times S^1. \tag{8}$$

On est prêt pour énoncer le résultat de persistance.

Proposition 2 *Si $R_0 > 1$, alors le système est uniformément persistant par rapport à l'ensemble S. Autrement dit, il existe $\eta > 0$ tel que si $I_0(x) \in L^1_+(\mathbb{R}^+)$ vérifie l'équation (2), alors*

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} I(t,x)dx \geq \eta.$$

Preuve. On va démontrer ce résultat en appliquant le théorème 2 ; on aurait pu aussi utiliser [23, théorème 4.5 ou théorème 4.13]. Notons que l'ensemble $X \setminus S$ est positivement invariant, puisque de $I_0(x) > 0$ sur un ensemble de mesure positive dans $[0,+\infty[$, il résulte de (10) ci-dessous que $I(t,x)$ vérifie la même propriété pour tout $t \geq t_0$. La prochaine étape est de vérifier l'hypothèse $i)$ du théorème 2, c'est-à-dire de démontrer l'existence d'un attracteur global compact dans X pour π. Dans ce but, on va appliquer [11, théorème 9.1], qui établit l'existence d'un pareil attracteur pour les systèmes dynamiques qui sont asymptotiquement réguliers, ponctuellement dissipatifs et pour lesquels les orbites positives des ensembles bornés sont bornées. On commence par vérifier que π est asymptotiquement régulier.

Observons qu'en considérant les extensions $I_0(x) = 0$, $x \leq 0$ et $u(t) = 0$, $t < t_0$, on peut découper pour tout $\tau \geq 0$ l'opérateur $\pi(\hat{z}_0, t_0, \tau)$ comme suit :

$$\pi(\hat{z}_0, t_0, \tau) = U(\hat{z}_0, t_0, \tau) + V(\hat{z}_0, t_0, \tau) \tag{9}$$

où, pour $\tau \geq 0$ et $x \geq 0$

$$U(\hat{z}_0, t_0, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_0(x-\tau)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau}[r(s,s-t_0-\tau+x)+d(s)]\,ds} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

et

$$V(\hat{z}_0, t_0, \tau) = \begin{pmatrix} S(\tau+t_0;(\hat{z}_0,t_0)) \\ u(\tau+t_0-x)\mathrm{e}^{-\int_{t_0+\tau-x}^{t_0+\tau}[r(s,s-t_0-\tau+x)ds+d(s)]\,ds} \\ (t_0+\tau) \mod T \end{pmatrix}. \tag{11}$$

L'extension des fonctions I_0 et u à la droite réelle est nécessaire pour que le découpage de π soit bien défini. Les opérateurs U et V doivent avoir des valeurs dans $X = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+) \times S^1$. Dans le cas de U, ceci implique que pour tout τ fixé, la fonction $I_0(\cdot - \tau)$ doit être définie sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi I_0 doit être convenablement étendu à l'intervalle $[-\tau,+\infty[$. Un même raisonnement s'applique à V et à la fonction u.

En utilisant aussi la continuité uniforme de la fonction $c(t,x)$, on peut montrer que pour tout $\tau \geq 0$, l'opérateur $V(\cdot,\tau)$ est compact de X dans X. De plus, puisque pour chaque $\tau \geq 0$,

$$||U(\hat{z}_0, t_0, \tau)|| \leq \mathrm{e}^{-d_{min}\tau}||(\hat{z}_0, t_0)||, \tag{12}$$

où d_{min} est la valeur minimale de la fonction d, on a d'après [11, p. 498] que le système dynamique π est asymptotiquement régulier.

On montre enfin que π est ponctuellement dissipatif et que les orbites positives des ensembles bornés sont bornées. Puisque $\int_0^{+\infty} I(t,x)dx$ est différentiable par rapport à t, la même propriété est vraie pour la fonction $T(t) := S(t) + \int_0^{+\infty} I(t,x)dx + R(t)$ et un calcul montre que

$$\frac{dT}{dt} = b(t) - d(t)T. \tag{13}$$

Par conséquent, pour $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, si $T(0) = S_0 + \int_0^{+\infty} I_0(x)\,dx \leq M$, alors il existe $t(M,\varepsilon) \geq t_0$ tel que pour $t \geq t(M,\varepsilon)$ on ait

$$S(t) + \int_0^{+\infty} I(t,x)dx \leq T^*(t) + \varepsilon,$$

où $T^*(t)$ est l'unique solution périodique positive de (13). Puisque l'ensemble

$$B := \{(S, I(\cdot)) \in R^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+) : S + ||I||_1 \leq T^*_{max} + \varepsilon\} \times S^1,$$

où $T^*_{max} := \max_{t\in\mathbb{R}} T^*(t)$, est fermé et borné dans X, cela prouve la dissipativité ponctuelle et la bornitude des orbites positives. D'après [11, théorème 9.1], on conclut qu'il existe un attracteur compact global $A \subset X$, et l'hypothèse $i)$ du théorème 2 est vérifée.

Pour vérifier l'hypothèse $ii)$, on définit la fonction continue $P : X \to \mathbb{R}^+$

$$P(\hat{z}_0, t_0) = \int_0^{+\infty} I_0(x)dx.$$

On remarque que $P = 0$ si et seulement si $(\hat{z}_0, t_0) \in S$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $V = \{(\hat{z}_0, t_0) \in X : P(\hat{z}_0, t_0) \leq \varepsilon\}$. On va montrer, pour ε assez petit, qu'aucune orbite positive d'une solution de (1) avec une origine dans $V \setminus S$ ne peut être complètement contenue dans cet ensemble. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $(\hat{z}_0, t_0) = (S_0, I_0(\cdot), t_0) \in V \setminus S$ tel que

$$P(\pi((\hat{z}_0, t_0), \tau)) = \int_0^{+\infty} I(\tau + t_0, x)\,dx \leq \varepsilon, \qquad \tau \geq 0. \tag{14}$$

On va montrer que, pour tout ε assez petit, la solution de (1) qui vérifie (14) est une sursolution du système linéaire qui est proche du système (6) et dont les solutions croissent exponentiellement avec le temps. Cela sera en contradiction avec (14).

Pour définir le système proche du système linéarisé, observons que d'après (14), pour tout $t = t_0 + \tau \geq t_0$, on a

$$\frac{dS}{dt} \geq b(t) - C\varepsilon S(t) - d(t)S(t),$$

où $C > 0$ est tel que $c(t,x) \leq C$ pour tout $t \geq t_0$ et $x \geq 0$. Il existe une constante $M > 0$ indépendante de ε et $t_1 \geq t_0$ tels que pour tout $t \geq t_1$, on ait

$$S(t) \geq S^*(t) - M\varepsilon > 0\,. \tag{15}$$

En effet,

$$\frac{d(S - S^*)}{dt} + (d(t) + C\varepsilon)(S - S^*) \geq -C\varepsilon S^*(t)$$

implique que

$$S(t) \geq S^*(t) + (S(t_0) - S^*(t_0))e^{-\int_{t_0}^{t} d(s)\,ds - C\varepsilon(t-t_0)}$$
$$- C\varepsilon \int_{t_0}^{t} S^*(u)\, e^{-\int_u^t d(s)\,ds - C\varepsilon(t-u)} du\,.$$

Comme le second terme de cette inégalité converge vers zero quand $t \to +\infty$, il existe t_1 tel que pour tout $t \geq t_1 \geq t_0$, (15) soit vrai. Donc pour tout $t \geq t_1$,

$$I(t,0) \geq (S^*(t) - M\varepsilon) \int_0^\infty c(t,x)\, I(t,x)\, dx,$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} = -r(t,x)\, I(t,x) - d(t)\, I(t,x).$$

Donc (voir [1])

$$I(t,x) \geq J(t,x) \ \text{ for all } t \geq t_1, \ \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^+ \tag{16}$$

où $J(t,x)$ vérifie

$$\begin{cases} J(t,0) = (S^*(t) - M\varepsilon) \int_0^\infty c(t,x)\, J(t,x)\, dx, \\ \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = -r(t,x)\, J(t,x) - d(t)\, J(t,x). \end{cases} \tag{17}$$

pour tout $t \geq t_1$ et $J(t_1,x) = I(t_1,x)$. Puisque $X \setminus S$ est invariant,

$$\int_0^{+\infty} J(t_1,x)dx = \int_0^{+\infty} I(t_1,x)dx > 0. \tag{18}$$

Dans ce qui suit, on applique [25, théorème 2.5] pour étudier le comportement asymptotique de la solution de (17) qui coïncide avec $I(t_1,x)$ quand $t = t_1$. Ce théorème donne le comportement asymptotique des solutions d'une équation de renouvelllement du type

$$u(t) = \int_0^{t-t_1} A(t,x)u(t-x)dx + \overline{u}(t) \tag{19}$$

avec un noyau $A(t,s)$ périodique en t. Pour l'utiliser, on remarque que la première équation du système (17) peut s'écrire sous cette forme avec

$$A(t,x) = (S^*(t) - M\varepsilon)c(t,x)\mathrm{e}^{-\int_0^x r(s-x+t,s)ds - \int_{t-x}^t d(s)ds} \tag{20}$$

et

$$\overline{u}(t) = (S^*(t) - M\varepsilon) \int_{t-t_1}^{+\infty} I(t_1, x-t+t_1)c(t,x)\mathrm{e}^{-\int_{x-t+t_1}^x r(s-x+t,s)ds - \int_{t_1}^t d(s)ds} dx. \tag{21}$$

En gros, [25, théorème 2.5] montre que les solutions de l'équation de renouvellement qui ne convergent pas vers zéro se comportent asymptotiquement comme $\alpha v(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, où $\alpha > 0$ dépend de $\overline{u}$, et que le scalaire λ et la fonction T-périodique positive $v(t)$ vérifie

$$v = \hat{A}(\lambda)v, \quad \rho(\hat{A}(\lambda)) = 1 \tag{22}$$

avec

$$(\hat{A}(\lambda)(u))(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda s) A(t,s) u(t-s) ds.$$

On remarque qu'en choisissant si nécessaire un t_1 plus grand, on peut supposer que $\overline{u}(t) > 0$ sur $[t_1, t_1+\eta]$ pour un η convenable. En effet, par hypothèse, il existe $x_0 > 0$ tel que $c(t,x) > 0$ pour $x > x_0$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après (10) et puisque le support de $I_0(x)$ a une mesure positive dans $[0,+\infty[$, l'intersection pour $t_1 \geq t_0$ assez grand du support de $I(t_1, x-t+t_1)$ et de l'ensemble $x > x_0$ a une mesure positive. D'après (21), notre affirmation en résulte.

Soit $\mathscr{R}(\varepsilon)$ la reproductivité du système (17). Les opérateurs associés sont compacts. Donc le rayon spectral $\mathscr{R}(\varepsilon)$ est une fonction continue de ε [8, théorème 2.1]. Puisque $R_0 = \mathscr{R}(0) > 1$, choisissons $\varepsilon^* > 0$ assez petit pour que $\mathscr{R}(\varepsilon^*) > 1$. Alors il existe $\lambda(\varepsilon^*) > 0$ et $v_{\varepsilon^*}(t)$ qui vérifient (22). Oublions la dépendance de λ et v par rapport à ε^*. On peut facilement vérifier les autres hypothèses de [25, théorème 2.5] en fixant n'importe quelle fonction continue positive T-périodique w, en choisissant $\lambda_0 < \lambda' < 0$ et $j = 1$. Seule la w-positivité du noyau mérite attention. Rappelons que la w-positivité du noyau signifie que pour toute fonction continue positive ou nulle $\overline{u}$ qui n'est pas identiquement nulle sur l'intervalle $[t_1, t_1+T]$, la solution correspondante de l'équation de renouvellement vérifie

$$u(t) \geq \varepsilon w(t), \quad t \in [k_0 T + t_1, (k_0+2)T + t_1],$$

où $w(t) \neq 0$ est une fonction positive ou nulle périodique fixée, ε dépend de $\overline{u}$ tandis que k_0 n'en dépend pas.

Pour vérifier cette propriété, on remarque d'abord que si $\overline{u}$ est une fonction comme dans la définition ci-dessus, de $c(t,x) \geq 0$ sur $[t_1, +\infty[\times\mathbb{R}^+$ il résulte immédiatement que la solution correspondante de (19) est positive ou nulle.

Puisque la fonction $\overline{u}$ n'est pas identiquement nulle sur $[t_1, t_1+T]$, il existe un intervalle $[t', t''] \subset [t_1, t_1+T]$ tel que $\overline{u}(t) > 0$, $t \in [t', t'']$. De (19) on déduit que $u(t) \geq \overline{u}(t) > 0$ sur $[t', t'']$, ce qui conduit à $u(t-x) > 0$ si $t - x \in [t', t'']$. Si l'on considère maintenant un $t \geq t'' + x_0$, on a $x_0 \leq t - t'' \leq x \leq t - t'$ et donc

$$u(t) \geq \int_{t-t''}^{t-t'} A(t,x) u(t-x) dx \geq \int_{x_0}^{t-t'} A(t,x) u(t-x) dx > 0.$$

Par conséquent, $u(t) > 0$ sur $[t'' + x_0, +\infty[$. Considérons maintenant la fonction T-périodique positive w fixée ci-dessus. Si l'on choisit k_0 tel que $k_0 T + t_1 > t''$ et $\varepsilon < \dfrac{\min u(t)}{\max w(t)}$, où le minimum et le maximum sont pris dans l'intervalle $[k_0 T + t_1, (k_0 + 2)T + t_1]$, on voit que la w-positivité du noyau A est vérifiée.

On conclut que, si $u(t)$ est la solution de l'équation de renouvellement (19) avec le noyau (7) et le terme de forçage (21), alors il existe une fonction $\varphi(t)$ telle que $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ et pour laquelle

$$u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(\alpha v(t) + \varphi(t)),$$

avec $\alpha > 0$. Le fait que $\alpha > 0$ pour la fonction $\overline{u}(t)$ définie dans (21) est une conséquence immédiate du fait que $u(t) > 0$ pour $t \geq t_1$ (voir l'énoncé de [25, théorème 2.5] pour la définition de α).

Ainsi la solution du système (17) avec $J(t_1,x) = I(t_1,x)$ vérifie

$$J(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda(t-x)}(\alpha v(t-x) + \varphi(t-x))\mathrm{e}^{-\int_0^x r(t+s-x,s)\,ds - \int_{t-x}^t d(s)\,ds}, \qquad 0 \le x \le t - t_1.$$

D'après (16), en notant r_{sup} et d_{max} respectivement le supremum de $r(t,x)$ et le maximum de $d(t)$, on conclut que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} I(t,x) \ge \lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} J(t,x)\,dx \ge \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t-t_1} J(t,x)\,dx \tag{23}$$
$$\ge \mathrm{e}^{\lambda t} \min_{r\ge t_1}(v(r)+\varphi(r)) \int_0^{t-t_1} \mathrm{e}^{-(\lambda + r_{sup} + d_{max})x}\,dx = +\infty,$$

ce qui contredit (14). Notons que $\min_{r\ge t_1}(v(r)+\varphi(r)) > 0$ puisque $u(t) > 0$ pour $t \ge t_1$, v est périodique et $\varphi \to 0$ quand $t \to +\infty$.

□

Remarque 2 *Comme conséquence du théorème précédent et de [23, théorème 6.2], on conclut à l'existence d'une solution endémique périodique pour le système* (1) *quand* $R_0 > 1$. *En effet, on peut appliquer [23, théorème 6.2] à l'opérateur de Poincaré correspondant, qui est condensant car l'opérateur* V *dans* (11) *est compact et* U *dans* (10) *vérifie* (12). *On peut choisir la fonction* ρ *dans [23, théorème 6.2] ainsi :* $\rho : \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$ *définie par* $\rho(S,I) = \int_0^{+\infty} I(x)dx$.

4 Un modèle SIS avec retard

En 1976, Cooke et Kaplan [7] ont étudié le modèle

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)S(t)I(t) + a(t-\tau)S(t-\tau)I(t-\tau)$$
$$\frac{dI}{dt} = a(t)S(t)I(t) - a(t-\tau)S(t-\tau)I(t-\tau),$$

pour lequel $S(t) + I(t)$ est une constante que l'on peut fixer à 1. C'est un modèle *SIS* avec une période infectieuse qui est constante et égale à τ.

Le système peut donc se réduire à une seule équation

$$\frac{dI}{dt} = a(t)(1-I(t))I(t) - a(t-\tau)(1-I(t-\tau))I(t-\tau). \tag{24}$$

On suppose que le taux de contact $a(t)$ est une fonction continue, T-périodique et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans la suite que les infectieux au temps 0 correspondent à la somme des individus infectés sur la période $[-\tau, 0]$:

$$I(0) = \int_0^{\tau} a(-x)I(-x)(1-I(-x))\,dx. \tag{25}$$

Avec cette hypothèse, (24) est équivalent à

$$I(t) = \int_{t-\tau}^{t} a(s)I(s)(1-I(s))\,ds = \int_0^{\tau} a(t-x)I(t-x)(1-I(t-x))\,dx\,. \tag{26}$$

[7] a étudié l'équation (26) et a montré que si

$$\tau \times \min_{0\le t\le T} a(t) > 1\,,$$

alors (26) a une solution strcitement positive T-périodique ; de plus, si

$$\tau \times \max_{0\le t\le T} a(t) < 1\,,$$

alors $I(t)$ tend vers 0. Des simulations numériques furent présentées avec $a(t) = 1 + 0{,}5\sin(2\pi t)$. Les théorèmes indiquaient ce qui se passait pour $\tau > 2$ et pour $\tau < 2/3$, mais pas entre les deux.

Le problème a été repris dans [18, 19, 21]. [18] considère l'opérateur obtenu par linéarisation de (26) près de $I = 0$,

$$I(t) \longmapsto \int_{t-\tau}^{t} a(s)I(s)\,ds = \int_0^{\tau} a(t-x)I(t-x)\,dx \tag{27}$$

sur un ensemble de fonctions T-périodiques. Il fut prouvé qu'il existe un unique $\tau^* > 0$ tel que cet opérateur ait un rayon spectral égal à 1, que (26) a une solution strictement positive périodique pour $\tau > \tau^*$, et que $\tau^* = 1$ dans l'exemple numérique de [7].

Étudions maintenant l'incidence de la maladie, définie par $i(t) = a(t)S(t)I(t)$. Elle vérifie l'équation

$$i(t) = a(t)S(t)\int_{t-\tau}^{t} i(s)\,ds\,.$$

Dans l'approximation linéaire près de la solution dans maladie, on obtient

$$i(t) \simeq a(t)\int_0^{\tau} i(t-x)\,dx\,.$$

Comme dans [4], la stabilité linéaire de la solution sans maladie peut se formuler en utilisant la reproductivité R_0, définie comme le rayon spectral de l'opérateur

$$\phi(t) \mapsto a(t)\int_0^{\tau} \phi(t-x)\,dx$$

sur l'espace des fonctions continues T-périodiques. Ce rayon spectral est d'ailleurs égal à celui de l'opérateur (27) : l'un peut s'écrire $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$, où $\mathscr{A} : \phi(t) \mapsto a(t)\,\phi(t)$ and $\mathscr{B} : \phi(t) \mapsto \int_0^{\tau} \phi(t-x)\,dx$, tandis que l'autre est $\mathscr{B}\circ\mathscr{A}$.

Pour $a(t) = \bar{a}(1+\varepsilon\sin(\omega t-\phi))$, [2, équation (49)] montre que la reproductivité pour (26) est

$$R_0 = \bar{a}\tau + \varepsilon^2\,\frac{2\,\bar{a}\tau\,\sin^2(\omega\tau/2)}{[\omega\tau-\sin(\omega\tau)]^2+[1-\cos(\omega\tau)]^2}\Big[\frac{\omega\tau/2}{\tan(\omega\tau/2)}-1\Big] + o(\varepsilon^2)$$

quand $\varepsilon \to 0$. Dans le cas non génerique de [7] où $\bar{a} = 1$ et $\omega = 2\pi$ (on peut choisir l'unité de temps telle qu'une de ces égalités soit vraie, mais pas les deux à la fois), on obtient $R_0 = 1 + o(\varepsilon^2)$ quand $\tau = 1$. Rappelons que [18] a obtenu plus précisément que $R_0 = 1$ dans ce cas très spécial. .

Dans la suite, on se concentre sur (24)-(25) et on démontre l'extinction de la maladie si $R_0 < 1$ et la persistance si $R_0 > 1$. Commençons par énoncer des propriétés élémentaires des solutions de (24)-(25). Notons $C([-\tau,0],[0,1])$ l'espace des fonctions continues dans $[-\tau,0]$ à valeurs dans $[0,1]$.

Lemme 1 *Soit $I_0 \in C([-\tau,0],[0,1])$ qui vérifie* (25) *et tel que $I_0 \not\equiv 0$. Si $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $I(t) = I(t;(I_0,t_0))$ de* (24) *définie dans $[t_0 - \tau, +\infty[$ et telle que $I(t_0+t) = I_0(t)$ dans $[-\tau,0]$ et $I(t) \in]0,1]$ pour tout $t \geq t_0$.*

Preuve. Remarquons d'abord que (25) implique $I_0 \not\equiv 1$. L'existence locale et l'unicité des solutions sont une conséquence immédiate des résultats classiques. D'un autre côté, puisque $a(\cdot)$ est une fonction strictement positive, puisque $I_0(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in [-\tau,0]$, puisque $I_0 \not\equiv 1$ et $I_0 \not\equiv 0$, on a $I(t_0+t) > 0$ pour tout $t \in [0,t^*[$, où t^* est tel que $I(t_0+t) \leq 1$ sur $[0,t^*[$. Si l'on suppose qu'il existe $t^* \geq 0$ tel que $I(t_0+t^*) = 1$ et $I(t_0+t) \in]0,1]$ pour tout $t \in [0,t^*]$, alors on a $I'(t_0+t^*+\eta) \leq 0$ pour tout $0 < \eta < \delta$ si δ est assez petit. Ainsi on conclut que $I(t_0+t) \in]0,1]$ pour tout $t \geq 0$.

On peut conclure que les solutions avec des conditions initiales $I_0 \in C([-\tau,0],[0,1])$ sont définies sur $[t_0 - \tau, +\infty[$ et le lemme en résulte. □

Comme conséquence du lemme précédent, on a que l'application qui associe à $(I_0,t_0) \in C([-\tau,0],[0,1]) \times \mathbb{R}^+$ et $t \geq 0$ la fonction $I_{t+t_0}(\cdot;(I_0,t_0)) \in C([-\tau,0],[0,1])$ définie par $I_{t+t_0}(\theta;(I_0,t_0)) := I(t+t_0+\theta;(I_0,t_0))$ est bien définie.

On montre maintenant un lemme de comparaison qui sera utilisé dans la suite.

Lemme 2 *Soit $b(\cdot)$ une fonction continue et positive définie sur $[T_1,+\infty[$. Supposons que y_1 et y_2 soient des fonctions continues définies sur $[T_1,+\infty[$ telles que, pour tout $t > T_1+\tau$, $y_1(t) \geq \int_{t-\tau}^{t} b(s)y_1(s)ds$ et $y_2(t) \leq \int_{t-\tau}^{t} b(s)y_2(s)ds$. Si $y_1(t) > y_2(t)$ sur $[T_1,T_1+\tau]$, alors $y_1(t) > y_2(t)$ pour tout $t > T_1+\tau$.*

Preuve. Considérons la fonction $x(\cdot) := (y_1 - y_2)(\cdot)$. C'est une fonction continue définie sur $[T_1,+\infty[$ telle que

$$x(t) \geq \int_{t-\tau}^{t} b(s)x(s)ds, \forall t \in [T_1+\tau,+\infty[. \tag{28}$$

De plus, $x(t) > 0$ sur $[T_1,T_1+\tau]$. Supposons que l'ensemble $\mathscr{T} = \{t > T_1+\tau : \ x(t) \leq 0\}$ soit non vide et soit t_0 sa borne inférieure. Alors d'après (28) il existe $t_1 \in]t_0-\tau,t_0[$ tel que $x(t_1) \leq 0$ et ceci contredit le fait que $x(t) > 0$ sur $[T_1,T_1+\tau]$ et que t_0 soit la borne inférieure de $\mathscr{T}$. Le résultat en découle.

Proposition 3 *Si $R_0 < 1$ alors la maladie disparaît.*

Preuve. Pour simplifier la présentation, supposons $t_0 = 0$. Soit $I_0 \in C([-\tau,0],[0,1])$, $I_0 \not\equiv 0$ et tel que (25). D'après le lemme précédent, on sait que $I(t) \in]0,1]$ pour tout $t \geq 0$. De l'équation (26) ; on a $I(t) \leq \int_{t-\tau}^{t} a(s)I(s)ds$.
Considérons l'opérateur compact positif

$$\Psi_\lambda : \phi(t) \mapsto \int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)} a(s)\phi(s)\, ds$$

défini sur l'espace des fonctions réelles continues et T-périodiques muni de la norme du maximum. Soit ϕ la fonction identiquement égale à 1. Alors

$$(\Psi_\lambda \phi)(t) \geq \left(\min_{0\leq s\leq T} a(s)\right) \int_{t-\tau}^{t} e^{\lambda(t-s)} ds = \left(\min_{0\leq s\leq T} a(s)\right) \frac{e^{\lambda\tau}-1}{\lambda}\, \phi(t).$$

Ceci donne une borne inférieure de Collatz-Wielandt pour le rayon spectral [9, théorème 2.1] :

$$\rho(\Psi_\lambda) \geq \left(\min_{0\leq s\leq T} a(s)\right) \frac{e^{\lambda\tau}-1}{\lambda}.$$

Donc $\rho(\Psi_\lambda) \to +\infty$ quand $\lambda \to +\infty$.

Ainsi, en tenant compte du fait que le rayon spectral de Ψ_λ est une fonction continue croissante de λ, de $\rho(\Psi_0) = R_0 < 1$ et de $\rho(\Psi_\lambda) > 1$ pour λ assez grand, on voit qu'il existe $\lambda_* > 0$ tel que $\rho(\Psi_{\lambda_*}) = 1$. D'après le théorème de Krein et Rutman, il y a une fonction positive ou nulle périodique non identiquement nulle v telle que $\Psi_{\lambda_*} v = v$, c'est-à-dire

$$\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_*(t-s)} a(s)v(s)\, ds = v(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Notons qu'avec cette expression et comme $v \not\equiv 0$, il existe t_1 tel que $v(t) > 0$ pour tout $t \geq t_1$. Comme v est périodique, on a $v(t) > 0$ pour tout t.

La fonction $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_* t} v(t)$ est une solution de

$$j(t) = \int_{t-\tau}^{t} a(s)\, j(s)\, ds. \tag{29}$$

Soit K tel que $K\psi(t) > I(t)$ pour tout $t \in [-\tau,0]$. Appliquons le lemme 2 en choisissant $T_1 = -\tau$, $b(\cdot) = a(\cdot)$, $y_1 = K\psi$ et $y_2 = I$. Comme $I(t) \leq \int_{t-\tau}^{t} a(s)I(s)ds$ et $K\psi$ est une solution de (29), on a $K\Psi(t) > I(t)$ pour tout $t \geq 0$. Enfin, puisque $\lambda_* > 0$, le résultat en découle.

Proposition 4 *Si $R_0 > 1$ alors l'équation (24) est uniformément persistant par rapport à $S = \{\mathscr{O}\} \times S^1$, où $\mathscr{O}$ désigne la fonction nulle dans $C([-\tau,0],[0,1])$.*

Preuve. On utilise le théorème 2. Définissons le système dynamique $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \to X$, où

$$X = \{I \in C([-\tau,0],[0,1]) : I \text{ satisfait (25)}\} \times S^1$$

(on identifie $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ avec S^1) par $\pi((I_0,t_0),t) = (I_{t+t_0}(\cdot;(I_0,t_0)),(t+t_0) \mod T)$. On a que $X \setminus S$ est positivement invariant comme conséquence du lemme 1.

En utilisant [12, théorèmr 4.1.11], l'existence d'un attracteur compact K pour les orbites de (24) est assurée puisque $\pi(X,t)$ est borné. L'hypothèse $i)$ du théorème 2 est vérifiée.

Soit $P : X \to \mathbb{R}^+$ tel que $P(\phi,s) = \max_{\ell\in[-\tau,0]} |\phi(\ell)|$. L'hypothèse $ii)a)$ est vérifiée. Montrons $b)$. Soit $U = \{(\phi,s) \in X : P(\phi,s) \leq \varepsilon\}$ où ε est assez petit. Pour obtenir une contradiction, supposons qu'il existe $(\phi,s) \in U \setminus S$ tel que pour tout $t \geq 0$ on ait $P(\pi((\phi,s),t)) \leq P(\phi,s) \leq \varepsilon$. Ainsi

$$|I(t+s+\theta;(\phi,s))| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } \theta \in [-\tau,0]. \tag{30}$$

D'après (24), on obtient pour tout $t \geq s$

$$I(t) \geq (1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} a(s)\,I(s)\,ds.$$

On raisonne maintenant comme dans la preuve du résultat précédent. Comme $R_0 > 1$, on a pour $\varepsilon > 0$ assez petit que le rayon spectral $R_{0,\varepsilon}$ de l'opérateur

$$\phi(t) \mapsto (1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} a(s)\phi(s)\,ds,$$

défini sur l'espace des fonctions réelles continues et T-périodiques avec la norme du maximum, sera plus grand que 1.

Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Psi_{\lambda,\varepsilon} : \phi(t) \mapsto (1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)} a(s)\phi(s)\,ds$$

dans le même espace. Pour λ négatif et assez petit, le rayon spectral de cet opérateur est inférieur à 1. C'est une conséquence du fait que le rayon spectral soit inférieur à la norme d'opérateur :

$$\rho(\Psi_{\lambda,\varepsilon}) \leq \sup_{\|\phi\|\leq 1} |(1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)} a(s)\phi(s)ds|.$$

Ainsi

$$\rho(\Psi_{\lambda,\varepsilon}) \leq \sup_{\|\phi\|\leq 1} (1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(t-s)} a(s)|\phi(s)|ds$$

ce qui implique que

$$\rho(\Psi_{\lambda,\varepsilon}) \leq (1-\varepsilon)\left(\max_{0\leq s\leq T} a(s)\right)\frac{1-\mathrm{e}^{\lambda\tau}}{-\lambda}.$$

Le résultat en découle pour $\lambda < 0$ avec $|\lambda|$ assez grand.

Comme le rayon spectral de $\Psi_{\lambda,\varepsilon}$ est une fonction continue et croissante de λ, comme $\rho(\Psi_{0,\varepsilon}) = R_{0,\varepsilon} > 1$ et comme pour λ assez petit ce rayon spectral est inférieur à 1, il existe $\lambda_* < 0$ et une fonction positive périodique $v(t)$ telle que

$$(1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_*(t-s)} a(s)v(s)\,ds = v(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_* t} v(t)$ est une solution de

$$j(t) = (1-\varepsilon) \int_{t-\tau}^{t} a(s)\, j(s)\, ds. \tag{31}$$

Comme $(\phi, s) \in U \setminus S$, on a $I(t+s;(\phi,s)) > 0$ pour tout $t \geq 0$. Choisissons K assez petit pour que $K\mathrm{e}^{-\lambda_* t} v(t) \leq I(t+s;(\phi,s))$ pour tout $t \in [0,\tau]$. Comme $I(t) \geq (1-\varepsilon)\int_{t-\tau}^{t} a(s) I(s) ds$ et $K\psi(t)$ est une solution de (31), avec le lemme 2 où $T_1 = 0$ et $b(\cdot) = (1-\varepsilon)a(\cdot)$, on a $K\mathrm{e}^{-\lambda_* t} v(t) < I(t+s;(\phi,s))$ pour tout $t \geq 0$. Comme $\lambda_* < 0$, ceci contredit (30) et prouve le résultat.

□

Remarque 3 *Comme conséquence du théorème précédent et du [23, théorème 6.3], on conclut à l'existence d'une solution périodique endémique pour* (24) *lorsque* $R_0 > 1$. *En effet, on peut appliquer [23, théorème 6.3] à l'opérateur de Poincaré correspondant qui est compact et considérer la fonction* $\tilde{\rho} : C([-\tau,0],[0,1]) \to \mathbb{R}$ *définie par* $\tilde{\rho}(\phi) = \int_{-\tau}^{0} \phi(s) ds$.

Remerciements Les auteurs remercient le professeur Fabio Zanolin pour les discussions utiles autour du théorème 2. Ils remercient aussi les rapporteurs pour les suggestions qui ont aidé à améliorer l'article.

Références

[1] Anita S (2000) Analysis and control of age-dependent population dynamics. Kluwer, Dordrecht

[2] Bacaër N (2007) Approximation de la reproductivité nette R_0 pour les maladies à vecteurs avec une population périodique de vecteurs. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291211`

[3] Bacaër N, Ait Dads E (2011) Les généalogies avec saisonnalité, la reproductivité nette et la pandémie de grippe. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01274025`

[4] Bacaër N, Guernaoui S (2006) Le seuil épidémique des maladies à vecteurs avec saisonnalité. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285109`

[5] Bacaër N, Ouifki R (2007) Taux de croissance et reproductivité nette pour des modèles de populations avec un facteur périodique simple. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01293898`

[6] Castillo-Chavez C., Thieme HR (1993) How may infection-age dependent infectivity affect the dynamics of HIV/AIDS ? SIAM J. Appl. Math. 53 :1447-1479

[7] Cooke K, Kaplan JL (1976) A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth. Math Biosci 31 :87-104

[8] Degla G (2008) An overview of semi-continuity results on the spectral radius and positivity. J Math Anal Appl 338 :101-110

[9] Drnovšek R (2000) Bounds for the spectral radius of positive operators. Comment. Math. Univ. Carolinae 41 :459-467

[10] Fonda A (1988) Uniformly persistent semidynamical systems. Proc Amer Math Soc 104 :111-116

[11] Hale J (2006) Dissipation and compact attractors. J Dynam Differ Equat 18 :485-523

[12] Hale J (1988) Asymptotic behavior of dissipative systems. American Mathematical Society, Providence RI

[13] Hofbauer J (1989) A unified approach to persistence. Acta Applicandae Math 14 :11-22

[14] Hofbauer J, So JWH (1989) Uniform persistence and repellors for maps. Proc Amer Math Soc 107 :1137-1142

[15] Kato T (1995) Perturbation theory for linear operators. Springer, Berlin

[16] Magal P (2001) Compact attractors for time-periodic age-structured population models. Electron J Differ Equat 65 :1-35

[17] Magal P, McCluskey CC, Webb GF (2010) Lyapunov functional and global asymptotic stability for an infectious-age model. Applic Anal 89 :1109-1140

[18] Nussbaum RD (1977) Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics. In : Lakshmikantham V (ed) Nonlinear systems and applications. Academic Press, New York, pp 235-257

[19] Nussbaum RD (1978) A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations. SIAM J Math Anal 9 :356-376

[20] Rebelo C, Margheri A, Bacaër N (2012) Persistence in seasonally forced epidemiological models. J Math Biol 64 :933-949

[21] Smith HL (1977) On periodic solutions of a delay integral equation modelling epidemics. J Math Biol 4 :69-80

[22] Smith HL (2011) An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. Springer, Berlin

[23] Smith HL, Thieme HR (2011) Dynamical systems and population persistence. American Mathematical Society, Providence RI

[24] Thieme HR (2009) Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity. SIAM J Appl Math 70 :188-211

[25] Thieme HR (1984) Renewal theorems for linear periodic Volterra integral equations. J Integral Equat 7 :253-277

[26] Webb GF (1985) Theory of nonlinear age-dependent population dynamics. Marcel Dekker, New York

[27] Webb GF, D'Agata E, Magal P, Ruan S (2005) A model of antibiotic resistant bacterial epidemics in hospitals. Proc Nat Acad Sci 102 :13343–13348

[28] Zhang F, Zhao XQ (2007) A periodic epidemic model in a patchy environment. J Math Anal Appl 325 :496-516