Un modèle épidémique structuré par âge pour la transition démographique

Hisashi Inaba* † Ryohei Saito‡ Nicolas Bacaër§

J. Math. Biol. 77 (2018) 1299-1339
hal : 01895762

Résumé

On propose dans cet article un modèle épidémique structuré par âge pour la transition démographique. Les normes culturelles qui conduisent à une fécondité plus basse sont transmises entre individus de la même manière que les maladies infectieuses. On formule d'abord le modèle de base comme un problème de Cauchy abstrait homogène dans un espace de Banach pour prouver l'existence, l'unicité et le caractère bien posé des solutions. Puis on étudie l'existence de solutions exponentielles non triviales. On étudie enfin la stabilité linéaire du système près des solutions exponentielles en utilisant la croissance exponentielle asynchrone. On formule la condition de stabilité en utilisant la notion de reproductivité.

Mots-clés : système dynamique homogène, transition démographique, modèles épidémiques.

1 Introduction

Pendant les XVIIIe et XIXe siècles, les taux de mortalité dans les pays développés d'Europe et d'Amérique du nord ont baissé avec le progrès économique et le développement industriel. Les indices de fécondité commencèrent à baisser un peu plus tard ; au XXe siècle, ces pays ont eu des taux de mortalité et des indices de fécondité très bas, de sorte que les taux de croissance de ces populations baissèrent fortement. On appelle « transition démographique » le passage du couple (mortalité, fécondité) de (élevée, élevée) à (faible, élevée) puis à (faible, faible) [3, 17]. Depuis la fin de la seconde guerre mondiale, des pays en voie de développement ont aussi connu une transition démographique. Certains

*Département de mathématiques, Université de Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914 Japon, courriel : inaba@ms.u-tokyo.ac.jp (auteur correspondant)

†Hisashi Inaba a reçu le soutien de MEXT kakenhi.

‡Rei-Frontier Inc., KS Build. 301, 2-26-8 Taito, Taito-ku Tokyo 110-0016 Japon.

§Institut de Recherche pour le Développement, Campus des Cordeliers, Paris, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

experts avaient prédit que les populations se stabiliseraient après la transition démographique. Mais des pays développés comme le Japon et comme certains pays européens ont connu une baisse supplémentaire de l'indice de fecondité. On appelle « seconde transition démographique » cette baisse sous le seuil de remplacement et le taux de croissance négatif qui l'accompagne. On n'observe pas forcément un déclin de la population s'il y a une forte immigration comme dans certains pays occidentaux. La seconde transition démographique est un phénomène complexe et controversé [3]. Au Japon, l'immigration est très limitée et la population diminue (Fig. 1).

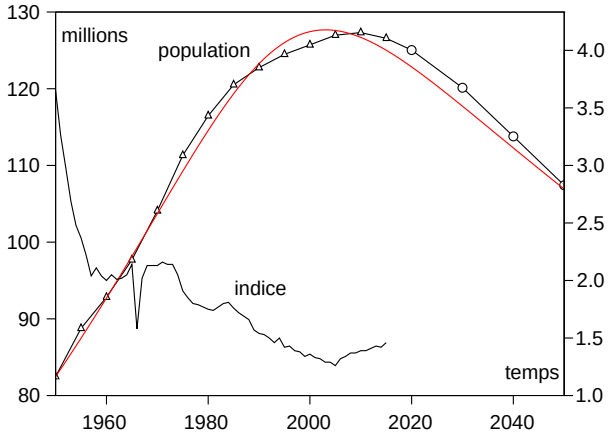

FIGURE 1 – Axe de gauche : population passée (triangles) et projetée (cercles) du Japon de 1950 à 2050 (source : INED/Nations Unies, 2015). Comparaison avec le modèle simple sans structure d'âge (en rouge). Axe de droite : indice de fécondité.

L'hypothèse bien connue de la modernisation insiste sur le fait que le faible indice de fécondité résulte de l'adaptation des individus au monde moderne, c'est-à-dire à l'industrialisation, à l'urbanisation et aux standards éducatifs et familiaux. D'un autre côté, la théorie de la diffusion pour la transition démographique suppose que les nouvelles normes culturelles qui diminuent le nombre des naissances peuvent être transmises des individus à basse fécondité (les « infectés ») aux individus traditionnels avec une fécondité élevée (les « susceptibles »). Dans l'article présent, on propose un modèle épidémique structuré par âge pour expliquer la transition démographique en utilisant la théorie de la diffusion [19, 18].

Pour illustrer les principaux aspects de la dynamique de transmission dans une population croissante ou décroissante, considérons tout d'abord le cas simple indépendant de l'âge. Soit $S(t)$ le nombre d'individus avec une fécondité élevée, c'est-à-dire les susceptibles, au temps t. Soit $I(t)$ le nombre d'individus avec une

faible fécondité, c'est-à-dire les infectés, au temps t. Le système sans structure par âge pour la transition démographique est un système homogène de Lotka–Volterra :

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = \lambda_1 S(t) - \dfrac{\beta S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}, \\ \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \lambda_2 I(t) + \dfrac{\beta S(t)I(t)}{S(t)+I(t)}, \end{cases} \tag{1}$$

où λ_1 et λ_2 sont les paramètres malthusiens pour les personnes susceptibles et infectées ; on a $\lambda_1 > \lambda_2$ tandis que $\beta > 0$ est le coefficient de transmission. On suppose que la force d'infection est donnée par la loi homogène $\beta S/N$ avec $N = S + I$, et que la différence entre les paramètres malthusiens reflète la différence de fécondité (c'est-à-dire on néglige la différence de mortalité) [1].

On étudie le modèle (1) dans la section 2. Il y a essentiellement deux cas :

- si $\beta < \lambda_1 - \lambda_2$, alors la population susceptible croît asymptotiquement comme $e^{\lambda_1 t}$, la population infectée croît ou décroît asymptotiquement comme $e^{(\beta+\lambda_2)t}$, de sorte que la fraction infectée tend vers 0 ;
- si $\beta > \lambda_1 - \lambda_2$, alors la population susceptible croît ou décroît asymptotiquement comme $e^{(\lambda_1-\beta)t}$, la population infectée croît ou décroît asymptotiquement comme $e^{\lambda_2 t}$, de sorte que la fraction infectée tend vers 1.

On ajuste les paramètres λ_1, λ_2 et β aux données de population du Japon : voir la figure 1, où $\lambda_1 = 0{,}012$ par an, $\lambda_2 = -0{,}005$ par an, $\beta = 0{,}12$ par an, $t = 0$ correspond à l'année 1950, $N(0) = 82{,}474$ millions et $I(0)/N(0) = 1\%$.

À partir de la section 3, on étend les observations ci-dessus à un modèle structuré par âge ; c'est le sujet principal de cet article et cela permet des comportements plus complexes. En particulier, il y a un troisième cas non dégénéré où les fractions susceptibles et infectées croissent ou décroissent toutes les deux asymptotiquement comme $e^{\lambda t}$ avec $\lambda_1 > \lambda > \lambda_2$ et où la fraction infectée converge vers un nombre strictement compris entre 0 et 1.

2 Le modèle sans structure par âge

Le système (1) a deux solutions exponentielles triviales, $(S, I) = (N(0)e^{\lambda_1 t}, 0)$ et $(S, I) = (0, N(0)e^{\lambda_2 t})$, qui correspondent respectivement à une population complètement susceptible et à une population complètement infectée. Notons que contrairement aux modèles épidémiques traditionnels, les personnes infectées peuvent persister sans les susceptibles. On a donc deux problèmes d'invasion : soit les infectés envahissent la population susceptible, soit les susceptibles envahissent la population infectée.

Considérons la prévalence $v(t)$ définie par

$$v(t) := \frac{I(t)}{S(t)+I(t)}\,.$$

1. Le taux de mortalité de chaque population est $\mu > 0$ et $\lambda_j = m_j - \mu$ avec $m_1 > m_2$, où m_j est le taux de natalité de la j^{e} population.

Alors $u(t) := 1 - v(t)$ est la proportion de susceptibles. On voit que v vérifie l'équation logistique

$$v' = -hv + hv^2,$$

où $h := \lambda_1 - \lambda_2 - \beta$. Supposons que $0 < v(0) < 1$. La solution de l'équation différentielle est

$$v(t) = \frac{1}{(1/v(0))e^{ht} + (1 - e^{ht})}.$$

Donc

$$v(t) \to \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta < \lambda_1 - \lambda_2, \\ 1 & \text{si} \quad \beta > \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases}$$

quand $t \to +\infty$. Dans le cas dégénéré où $\beta = \lambda_1 - \lambda_2$, on a $v(t) = v(0)$ pour tout $t \geq 0$.

Soit $N(t) = S(t) + I(t)$ la population totale. Les taux asymptotiques de croissance de la population totale et des sous-populations infectées et susceptibles sont donnés dans le cas non dégénéré par

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \lambda_1(1 - v(t)) + \lambda_2 v(t) \to \begin{cases} \lambda_1 & \text{si} \quad \beta < \lambda_1 - \lambda_2, \\ \lambda_2 & \text{si} \quad \beta > \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases}$$

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = \lambda_2 + \beta(1 - v(t)) \to \begin{cases} \lambda_2 + \beta & \text{si} \quad \beta < \lambda_1 - \lambda_2, \\ \lambda_2 & \text{si} \quad \beta > \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases}$$

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \lambda_1 - \beta v(t) \to \begin{cases} \lambda_1 & \text{si} \quad \beta < \lambda_1 - \lambda_2, \\ \lambda_1 - \beta & \text{si} \quad \beta > \lambda_1 - \lambda_2, \end{cases}$$

quand $t \to +\infty$. La figure 2 présente ces différents cas.

On peut formuler la condition de seuil pour la population infectée (celle avec une fécondité faible) en utilisant un indice d'invasion :

$$\mathbb{R}_2 = \frac{\beta}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{2}$$

Si $\mathbb{R}_2 > 1$, alors la transition démographique a lieu. Si $\mathbb{R}_2 < 1$, alors la population avec une fécondité faible est éliminée en proportion et la transition démographique n'a pas lieu. En effet, l'équation linéarisée du système pour (u, v) au point $(1, 0)$ est $v' = -hv = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbb{R}_2 - 1)v$. Le taux de croissance initial de la fraction avec une fécondité faible est positif, c'est-à-dire $(1, 0)$ est instable, si et seulement si $\mathbb{R}_2 > 1$.

D'un autre côté, l'équation linéarisée du système pour (u, v) au point $(0, 1)$ est $u' = hu = (\lambda_1 - \lambda_2 - \beta)u = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbb{R}_2 - 1)u$. On conclut que $(0, 1)$ est instable si et seulement si $\mathbb{R}_2 < 1$, de sorte que la transition démographique inverse se produit si $\mathbb{R}_2 < 1$. Ainsi il n'y a pas de cas bistable (ou bi-instable). Comme on verra ci-dessous, ce n'est pas le cas pour le modèle structuré par âge.

Vu différemment, l'équation variationnelle près de la solution exponentielle triviale $(S, I) = (N(0)e^{\lambda_1 t}, 0)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\beta \\ 0 & \lambda_2 + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3}$$

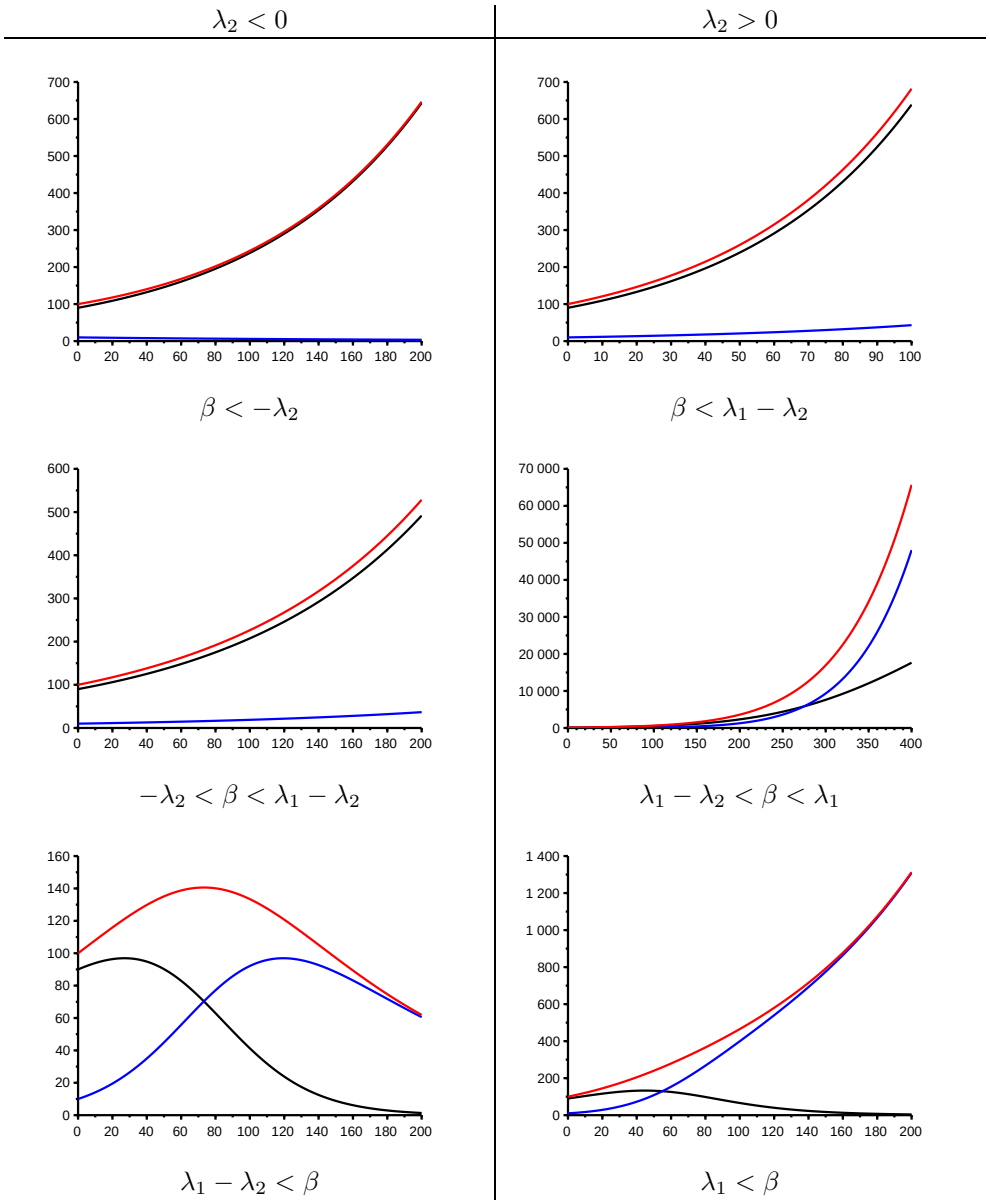

FIGURE 2 – Population susceptible $S(t)$ en noir, population infectée $I(t)$ en bleu et population totale $N(t)$ en rouge en fonction du temps t. Condition initiale : $N(0) = 100$, $I(0)/N(0) = 10\%$. Colonne de gauche : $\lambda_1 = 0{,}01$, $\lambda_2 = -0{,}01 < 0$, $\beta \in \{0{,}005;\ 0{,}015;\ 0{,}05\}$ (de haut en bas). Colonne de droite : $\lambda_1 = 0{,}02$, $\lambda_2 = 0{,}01 > 0$, $\beta \in \{0{,}005;\ 0{,}018;\ 0{,}05\}$ (de haut en bas).

où (x, y) est le terme de perturbation. Si $\beta + \lambda_2 < 0$, alors la population infectée ne peut pas croître. Si $\beta \in]-\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2[$, alors la solution exponentielle sans infection est déstabilisée, mais la population infectée est éradiquée en proportion de la population totale : il y a extinction relative. Si l'on introduit le taux de natalité m_j et le taux de mortalité commun μ tels que $\lambda_j = m_j - \mu$, alors cette condition s'écrit $\tilde{R}_{0,2} < 1 < R_{0,2}$ où

$$R_{0,2} = \frac{m_2 + \beta}{\mu}, \quad \tilde{R}_{0,2} = \frac{m_2 + \beta}{m_1}. \tag{4}$$

Ici $R_{0,2}$ est la reproductivité de la population avec une fécondité faible et $\tilde{R}_{0,2}$ est la reproductivité pour la prévalence de la population avec une fécondité faible dans le système normalisé. Bien sûr, $\tilde{R}_{0,2} > 1$ si et seulement si $\mathbb{R}_2 > 1$, car ce sont les conditions d'invasion pour l'état stationnaire sans infection dans le système normalisé.

Inversement, si $R_{0,2} < 1 < \tilde{R}_{0,2}$, alors $\lambda_1 < \lambda_2 + \beta < 0$, la transition démographique a lieu bien que les deux populations aient des taux de croissance négatifs (il y a endémicité relative).

De la même manière, l'équation variationnelle près de la solution exponentielle triviale $(S, I) = (0, N(0)e^{\lambda_2 t})$ est

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \beta & 0 \\ \beta & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Introduisons les reproductivités

$$R_{0,1} = \frac{m_1}{\mu + \beta}, \quad \tilde{R}_{0,1} = \frac{m_1}{m_2 + \beta}. \tag{6}$$

Si $\tilde{R}_{0,1} < 1 < R_{0,1}$, alors la solution complètement infectée (avec une fécondité faible) est déstabilisée, mais la population avec une fécondité élevée est éradiquée en proportion. Donc la transition démographique inverse n'a pas lieu.

Inversement, si $R_{0,1} < 1 < \tilde{R}_{0,1}$, alors la population envahissante avec une fécondité élevée décroît, mais elle croît en proportion. Donc la transition démographique inverse a lieu.

Ces calculs montrent que le succès de l'invasion n'implique pas nécessairement l'endémicité de la population envahissante dans notre système homogène. Les reproductivités doivent donc être définies avec précaution.

3 Un modèle avec une structure par âge

Considérons maintenant le modèle épidémique structuré par âge pour la transition démographique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial p_2(t,a)}{\partial a} = -(\mu(a) + \pi(t,a))p_1(t,a), \\ \dfrac{\partial p_2(t,a)}{\partial t} + \dfrac{\partial p_2(t,a)}{\partial a} = \pi(t,a)p_1(t,a) - \mu(a)p_2(t,a), \\ p_1(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty m_1(a)\, p_1(t,a)\, da, \\ p_2(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty m_2(a)\, p_2(t,a)\, da, \end{cases} \tag{7}$$

où $m_1(a)$ est le taux de fécondité par âge de la population susceptible (avec une fécondité élevée), $m_2(a)$ est le taux de fécondité par âge de la population infectée (avec une fécondité basse) et $\mu(a)$ est le taux commun de mortalité par âge. Supposons que la force d'infection culturelle $\pi(t,a)$ soit donnée par la loi homogène

$$\pi(t,a) := \frac{1}{N(t)} \int_0^\infty \beta(a,\sigma)\, p_2(t,\sigma)\, d\sigma,$$

où

$$N(t) := \int_0^\infty n(t,a)\, da,$$

est la population totale, $n(t,a) := p_1(t,a) + p_2(t,a)$ est la densité par âge de la population et $\beta(a,\sigma)$ est le coefficient de transmission entre personnes susceptibles d'âge a et personnes infectées d'âge σ.

Soit $\ell(a)$ la probabilité de survie jusqu'à l'âge a, définie par

$$\ell(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma\right),$$

et soit $\Phi_j(a) := m_j(a)\ell(a)$ la fonction de reproduction nette de la j^{e} population. On suppose que

$$m_1(a) > m_2(a),$$

de sorte que $\mathcal{R}_1 > \mathcal{R}_2$, où

$$\mathcal{R}_j := \int_0^\infty m_j(a)\ell(a) da$$

est la reproductivité pour la j^{e} population.

Le taux de croissance intrinsèque λ_j $(j = 1, 2)$ est la racine réelle dominante de l'équation caractéristique de Lotka [14, 23, 24] :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_j a} \Phi_j(a) da = 1.$$

Donc $\lambda_1 > \lambda_2$. On fait les hypothèses techniques supplémentaires :

Hypothèse 1. *1. $\lambda_1 > \lambda_2 > -\underline{\mu}$, où $\underline{\mu} := \inf_{a\in\mathbb{R}_+} \mu(a) > 0$.*

2. Supposons que $m_j \in L^1_+(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty_+(\mathbb{R}_+)$, $\mu \in L^\infty_+(\mathbb{R}_+)$ et qu'il existe $\beta_1 \in L^1_+(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty_+(\mathbb{R}_+)$ et $\beta_2 \in L^\infty_+(\mathbb{R}_+)$ tels que $\beta_1(a)\beta_2(\sigma) \le \beta(a,\sigma) \le \kappa\beta_1(a)\beta_2(\sigma)$ avec $\kappa > 1$, et tels que β_1 et β_2 soient des points quasi-intérieurs de L^1_+. De plus, supposons que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^\infty |\beta(a+h,\sigma) - \beta(a,\sigma)| da = 0 \text{ uniformément pour } \sigma \in \mathbb{R}_+.$$

Soit $p(t) = (p_1(t,\cdot), p_2(t,\cdot))^{\mathrm{T}}$. On considère le système comme un système dynamique homogène abstrait dans $X := L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$:

$$\frac{dp}{dt} = Ap(t) + F(p(t)), \quad p(0) = p_0, \tag{8}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe positif défini par

$$(A\phi)(a) = \begin{pmatrix} -\dfrac{d\phi_1}{da}(a) - \mu(a)\phi_1(a) \\ \\ -\dfrac{d\phi_2}{da}(a) - \mu(a)\phi_2(a) \end{pmatrix}$$

et avec le domaine

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ \phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) : \phi_j(0) = \int_0^\infty m_j(a)\phi_j(a)da \right\},$$

et $F : X_+ \to X$ est un opérateur non linéaire donné par

$$F(\phi)(a) := \begin{pmatrix} -\pi(a|\phi)\phi_1(a) \\ \pi(a|\phi)\phi_1(a) \end{pmatrix},$$

où $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in X_+$, $\|\phi\|_X := \int_0^\infty (|\phi_1(a)| + |\phi_2(a)|)da$ et

$$\pi(a|\phi) := \frac{1}{\|\phi\|_X} \int_0^\infty \beta(a,\sigma)\phi_2(\sigma)d\sigma.$$

Alors F est homogène de degré un, c'est-à-dire $F(\alpha\phi) = \alpha F(\phi)$ pour $\alpha > 0$ et $F(0) = 0$.

Lemme 3.1. *L'opérateur homogène F est globalement lipschitzien sur X_+ et il existe $\epsilon > 0$ tel que $(I + \epsilon F)(X_+) \subset X_+$.*

Démonstration. D'abord, observons que $\pi(a|z) \le |\beta|_\infty := \sup_{(a,\sigma)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} |\beta(a,\sigma)|$ pour tout $z \in X_+$. Puis $z_1 - \epsilon\pi(a|z_2)z_1 \ge (1 - \epsilon|\beta|_\infty)z_1$. Choisissons ϵ tel que $1 - \epsilon|\beta|_\infty > 0$. Alors $(I + \epsilon F)(X_+) \subset X_+$. Posons $|\phi|_1 := \int_0^\infty |\phi(\sigma)|d\sigma$ pour $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Pour $z, w \in X_+$, observons que

$$|\pi(a|z_2)z_1 - \pi(a|w_2)w_1|_1 \le \left| \frac{z_1}{\|z\|_X} - \frac{w_1}{\|w\|_X} \right|_1 \bar{\beta}|z_2|_1 + \frac{|w_1|_1}{\|w\|_X}\bar{\beta}|z_2 - w_2|_1$$

$$\leq \bar{\beta}\left(|z_1 - w_1|_1 \frac{|z_2|_1}{\|z\|_X} + \|w - z\|_X \frac{|z_2|_1 |w_1|_1}{\|z\|_X \|w\|_X} + |z_2 - w_2|_1 \frac{|w_1|_1}{\|w\|_X}\right)$$
$$\leq \bar{\beta}\left(|z_1 - w_1|_1 + \|w - z\|_X \frac{|w_1|_1}{\|w\|_X} + |z_2 - w_2|_1 \frac{|w_1|_1}{\|w\|_X}\right),$$

où nous avons utilisé les relations

$$\left|\frac{z_1}{\|z\|_X} - \frac{w_1}{\|w\|_X}\right|_1 \leq \frac{|z_1 - w_1|_1}{\|z\|_X} + |w_1|_1 \left|\frac{1}{\|z\|_X} - \frac{1}{\|w\|_X}\right|$$

et $|\|z\|_X - \|w_X\| \leq \|z - w\|_X$ pour tout $z, w \in X_+$. Donc

$$|\pi(a|z_2)z_1 - \pi(a|w_2)w_1|_1 \leq \bar{\beta}(|z_1 - w_1|_1 + \|z - w\| + |z_2 - w_2|_1) = 2\bar{\beta}\|z - w\|_X,$$

ce qui implique que $\|F(z) - F(w)\|_X \leq 4\bar{\beta}\|z - w\|_X$. Ainsi la fonction F est globalement lipschitzienne. □

Proposition 1. *Soit $p_0 \in X_+$. Alors le problème de Cauchy* (8) *a une unique solution intégrée*[2] *$p(t) \in X_+$ qui définit un semi-groupe $S(t)$ tel que $p(t) = S(t)p_0$ et $S(t)(X_+) \subset X_+$.*

Démonstration. À la place de l'équation originale (6), considérons l'équation équivalente :

$$\frac{dp}{dt} = \left(A - \frac{1}{\epsilon}\right)p + \frac{1}{\epsilon}(I + \epsilon F)p.$$

On sait bien que la solution intégrée de cette équation est une solution continue de l'équation intégrale

$$p(t) = e^{-\frac{1}{\epsilon}t}e^{At}f_0 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\epsilon}(t-s)}e^{A(t-s)}[p(s) + \epsilon F p(s)]ds,$$

où la constante ϵ est choisie de sorte que $1 - \epsilon\bar{\beta} > 0$ [1, 2, 24]. Puisque la perturbation non linéaire est globalement lipschitzienne, la solution globale de cette équation intégrale peut être construite par itération positive :

$$p_0(t) = p_0,$$
$$p_{n+1}(t) = e^{-\frac{1}{\epsilon}t}e^{At}p_0 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\epsilon}(t-s)}e^{A(t-s)}[p_n(s) + \epsilon F p_n(s)]ds.$$

La positivité de e^{At} et $I + \alpha F$ nous permet de démontrer par itération que $p_n \in X_+$. Comme l'opérateur F est lipschitzien, la suite $p_n(t)$ converge vers une solution intégrée locale et positive $p(t) \in X_+$. Il existe des nombres $M \geq 1$ et ω tels que $\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}$, de sorte que

$$\|p(t)\|_X \leq Me^{(\omega - \frac{1}{\epsilon})t}\|p_0\|_X + \frac{MK}{\epsilon}\int_0^t e^{(\alpha - \frac{1}{\epsilon})(t-s)}\|p(s)\|_X ds,$$

2. Pour la définition d'une solution intégrée, voir : A. Ducrot, P. Magal, S. Ruan, Une introduction aux modèles de dynamique de populations structurées en âge et aux problèmes de bifurcations. Gazette des mathématiciens 125 (2010) 27-40.

où $K := \|I + \epsilon F\|$. On peut démontrer aussi l'estimation :

$$\|p(t)\|_X \leq \|p_0\|_X e^{(\omega - \frac{1-MK}{\epsilon})t}.$$

Puisque la norme de la solution locale croît au plus exponentiellement avec le temps, on a en fait une solution globale. Ainsi on peut définir un semi-groupe $S(t)$ par $S(t)p_0 = p(t)$. □

4 Existence et stabilité des solutions exponentielles

Il est clair que l'origine est un point d'équilibre trivial de (6), qui est instable si $\lambda_1 > 0$ et stable si $\lambda_1 < 0$. Étant donné l'homogénéité du système de base, si p^* est un équilibre de (6), alors $p(t) = cp^*$ l'est aussi pour tout $c > 0$. Ainsi il ne peut y avoir d'équilibre attractif non trivial. Pour le système homogène, on s'intéresse principalement aux solutions exponentielles persistantes, qui jouent le même rôle que les solutions stationnaires des systèmes dynamiques non linéaires et non homogènes.

Comme [10], introduisons le système normalisé. Soit θ la fonctionnelle linéaire bornée de X dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\langle \theta, z \rangle := \int_0^\infty (z_1(a) + z_2(a))da, \quad z = (z_1, z_2) \in X,$$

qui donne la population totale si $z \in X_+$. Donc $\langle \theta, z(t) \rangle > 0$ si $z(0) \in X_+ \setminus \{0\}$.

Introduisons de nouvelles fonctions qui donnent le profil par âge :

$$w_1(t,a) = \frac{p_1(t,a)}{\langle \theta, p(t) \rangle}, \quad w_2(t,a) = \frac{p_2(t,a)}{\langle \theta, p(t) \rangle},$$

et

$$w(t) := (w_1(t,\cdot), w_2(t,\cdot)) \in \Gamma := \{\phi \in X_+ : \langle \theta, \phi \rangle = 1\},$$

où Γ est l'espace des profils par âge.

On peut remplacer le système (6) par le système normalisé :

$$\frac{dw}{dt} = Aw + F(w) - \langle \theta, Aw + F(w) \rangle w, \quad w \in \Gamma, \tag{9}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial a} = &- \mu(a) w_1(t,a) - w_1(t,a) \int_0^\infty \beta(a,b) w_2(t,b)\, db \\
&- w_1(t,a) \int_0^\infty [m_1(b) - \mu(b)] w_1(t,b)\, db \\
&- w_1(t,a) \int_0^\infty [m_2(b) - \mu(b)] w_2(t,b)\, db\,, \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial a} = &- \mu(a) w_2(t,a) + w_1(t,a) \int_0^\infty \beta(a,b) w_2(t,b)\, db \\
&- w_2(t,a) \int_0^\infty [m_1(b) - \mu(b)] w_1(t,b)\, db \\
&- w_2(t,a) \int_0^\infty [m_2(b) - \mu(b)] w_2(t,b)\, db\,,
\end{aligned}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{aligned}
w_1(t,0) &= \int_0^\infty m_1(a)\, w_1(t,a)\, da\,, \\
w_2(t,0) &= \int_0^\infty m_2(a)\, w_2(t,a)\, da\,.
\end{aligned}$$

Le système normalisé a une unique solution intégrée globale $S(t)w_0$, et Γ est positivement invariant par rapport au semi-groupe $S(t), t \geq 0$. Si $w_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors $S(t)p_0$ devient une solution classique. Il résulte de (10) que

$$\frac{d}{dt}\langle \theta, w\rangle = \langle \theta, (A+F)w(t)\rangle (1 - \langle \theta, w(t)\rangle).$$

Ainsi

$$\langle \theta, w(t)\rangle = 1 - (1 - \langle \theta, w(0)\rangle) e^{-\int_0^t \langle \theta, (A+F)w(s)\rangle ds},$$

d'où l'on conclut que $S(t)(\Gamma) \subset \Gamma$ pour tout $t > 0$. Si l'on utilise la solution $w(t)$ du système normalisé (10), la solution $p(t)$ du système de départ est donnée par

$$p(t) = w(t) \exp\left(\int_0^t \langle \theta, (A+F)w(s)\rangle ds\right) \langle \theta, z(0)\rangle.$$

Ainsi le problème original est réduit à un problème dans l'espace Γ des profils par âge.

Notez que $\langle \theta, (A+F)w\rangle$ est une forme linéaire sur X. Si l'on introduit la forme linéaire H de $X_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(\phi) := \int_0^\infty [(m_1(a) - \mu(a))\phi_1(a) + (m_2(a) - \mu(a))\phi_2(a)] da, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2) \in X_+.$$

et si w est une solution du système normalisé, alors $H(w(t))$ donne le paramètre malthusien pour la population totale :

$$H(w(t)) = \langle \theta, Aw + F(w)\rangle = \frac{1}{\langle \theta, p(t)\rangle} \frac{d\langle \theta, p(t)\rangle}{dt}.$$

Considérons le problème de l'existence et de la stabilité des solutions exponentielles persistantes. Soit $w^* \in \Gamma$ un équilibre du système normalisé. Alors on a le problème de valeur propre non linéaire suivant :

$$\lambda^* w^* = Aw^* + F(w^*), \quad w^* \in \mathcal{D}(A) \cap \Gamma, \tag{10}$$

où $\lambda^* = \langle \theta, (A+F)w^* \rangle$. Il est clair que $e^{\lambda^* t} w^*$ est une solution persistante du système de départ. Inversement, s'il existe une solution exponentielle $e^{\lambda^* t} z^*$ du système homogène (8), alors λ^* et $w^* = z^* / \langle \theta, z^* \rangle$ doit vérifier (10), et donc w^* est un équilibre du système normalisé.

Pour démontrer la stabilité linéaire de la solution exponentielle, la formule d'Euler pour le système homogène est cruciale [26].

Proposition 2. *Si F est différentiable au sens de Fréchet en $x \in X_+$, alors on a la formule d'Euler $F'[x]x = F(x)$, où $F'[x]$ est la dérivée de Fréchet en x. De plus, $F'[x] = F'[cx]$ pour tout $c > 0$.*

Démonstration. Supposons que F soit différentiable au sens de Fréchet en $x \in X_+$. Pour $h \in X_+$ et $c > 0$, posons $G_c(h) := F(cx+h) - F(cx) - F'[x]h$. Comme F est différentiable au sens de Fréchet en x, il existe une fonction continue croissante $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $L(0) = 0$ et $\|G_1(h)\|_X \leq L(\|h\|_X)\|h\|_X$ pour $h \in X_+$. Avec l'homogénéité, on a $G_c(h) = cG_1(h/c)$ pour $h \in X_+$ et $c > 0$. Ainsi si $h = x$, on a

$$F(cx+x) - F(cx) - F'(x)x = F(x) - F'[x]x = G_c(x) = cG_1(x/c).$$

Alors $\|F(x) - F'[x]x\|_X \leq L(\frac{\|x\|_X}{c})\|x\|_X$, ce qui implique que $F'[x]x = F(x)$ parce qu'on peut choisir c arbitrairement grand. La fonction composée $F(cx)$ est aussi différentiable au sens de Fréchet en x, donc il existe une fonction continue croissante $\tilde{L} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\tilde{L}(0) = 0$ et $\|F(c(x+h)) - F(cx) - F'[cx]ch\|_X \leq \tilde{L}(\|h\|_X)\|h\|_X$ pour $h \in X_+$. Avec l'homogénéité, on a

$$\|F(x+h) - F(x) - F'[cx]h\|_X \leq \tilde{L}(\|h\|_X)\|h\|_X/c.$$

Comme

$$\|F(x+h) - F(x) - F'[x]h\|_X \leq L(\|h\|_X)\|h\|_X,$$

on obtient $\|F'[cx]h - F'[x]h\|_X \leq \tilde{L}(\|h\|_X)\|h\|_X/c + L(\|h\|_X)\|h\|_X$. Alors

$$\|F'[cx](h/\|h\|_X) - F'[x](h/\|h\|_X)| \leq \tilde{L}(\|h\|_X)/c + L(\|h\|_X),$$

ce qui implique que $F'[cx]h = F'[x]h$ si $\|h\|_X = 1$. Comme $F'[cx]$ et $F'[x]$ sont tous les deux des opérateurs linéaires, on a $F'[cx] = F'[x]$. □

Ainsi, si F est différentiable au sens de Fréchet au point d'équilibre w^* du système normalisé avec $(A+F)w^* = \lambda^* w^*$, alors w^* est un vecteur propre positif de l'opérateur linéaire

$$B := A + F'[w^*]$$

associé à la valeur propre λ^*, et B est indépendant des multiplicateurs scalaires positifs pour w^*.

Dans une série d'articles [6, 7, 8], Hadeler et ses collaborateurs ont développé une théorie des systèmes dynamiques homogènes. La méthode de normalisation a en particulier été utilisée pour un système en dimension infinie par Iannelli et Martcheva [10].

Soit $\zeta(t) := w(t) - w^* \in X_\theta := \{\zeta \in X : \langle\theta, \zeta\rangle = 0\}$. Alors le système normalisé s'écrit comme une équation dans X_θ :

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta(t)}{dt} &= B\zeta(t) - \langle\theta, B\zeta(t)\rangle w^* - \lambda^*\zeta(t) + \mathcal{G}(\zeta(t)) \\ &= C\zeta(t) + \mathcal{G}(\zeta(t)),\end{aligned} \tag{11}$$

où

$$C\zeta := B\zeta - \langle\theta, B\zeta\rangle w^* - \lambda^*\zeta,$$

est un opérateur linéaire et $\mathcal{G}(\zeta)$ est le terme d'ordre deux, avec $\|\mathcal{G}(\zeta)\|_X/\|\zeta\|_X \to 0$ quand $\zeta \to 0$.

Lemme 4.1. *X_θ est invariant par C, e^{tC} et $\mathcal{G}$. Si $\zeta(0) \in X_\theta$, alors la solution intégrée de* (13) *est la solution de l'équation intégrale dans X_θ :*

$$\zeta(t) = e^{Ct}\zeta(0) + \int_0^t e^{C(t-s)}\mathcal{G}(\zeta(s))ds. \tag{12}$$

Démonstration. On voit facilement que $\langle\theta, C\zeta\rangle = 0$, $\langle\theta, \mathcal{G}\zeta\rangle = 0$ si $\zeta \in X_\theta$, donc C et $\mathcal{G}$ laissent X_θ invariant. Considérons l'équation

$$(\lambda - C)z = (\lambda + \lambda^*)z - Bz + \langle\theta, Bz\rangle w^* = f \in X_\theta,$$

pour $\lambda \in \rho(C)$ où $\rho(C)$ est l'ensemble résolvant de C. Alors $(\lambda+\lambda^*)\langle\theta, z\rangle = 0$, ce qui montre que $z \in X_\theta$ parce que $\Re(\lambda+\lambda^*) > 0$. Donc on a $(\lambda - C)^{-1}X_\theta \subset X_\theta$. Avec l'approximation de Yosida pour e^{tC}, on sait que $e^{tC}X_\theta \subset X_\theta$. □

Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\zeta(t)\|_X < \epsilon$ pour tout $t > 0$ lorsque $\|\zeta(0)\|_X < \delta$, alors on dit que w^* est stable. Si w^* est stable et $\lim_{t\to\infty} \|\zeta(t)\|_X = 0$ quand $\|\zeta(0)\|_X < \delta'$ pour un $\delta' > 0$, alors on dit que w^* est asymptotiquement stable. On dit que w^* est instable s'il n'est pas stable. Une solution exponentielle du système de départ est dite stable (au sens de Hadeler [7]) si l'équilibre correspondant du système normalisé est localement stable. On dit qu'elle est instable si l'équilibre correspondant du système normalisé est instable.

Pour tout opérateur linéaire T, on note $\rho(T)$ l'ensemble résolvant de T et $P_\sigma(T)$ le spectre ponctuel de T. Soit C_θ la restriction de C à X_θ, c'est-à-dire $C_\theta = C$ sur $\mathcal{D}(C_\theta) = \{\phi \in \mathcal{D}(C) \cap X_\theta : C\phi \in X_\theta\}$. Alors C_θ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu e^{tC_θ} sur X_θ.

Lemme 4.2. *Soit λ^* une valeur propre de B associée à w^* avec une multiplicité algébrique égale à un. Alors $P_\sigma(C) \setminus \{-\lambda^*\} = P_\sigma(C_\theta)$.*

Démonstration. Avec cette hypothèse, $-\lambda^*$ est une valeur propre de C associée à w^*, avec une multiplicité algébrique égale à un. Supposons que $Cx = \lambda x$ et $\lambda \neq -\lambda^*$. Alors $\langle \theta, Cx \rangle = -\lambda^* \langle \theta, x \rangle = \lambda \langle \theta, x \rangle$. Ainsi on a $(\lambda + \lambda^*)\langle \theta, x \rangle = 0$, ce qui montre $\langle \theta, x \rangle = 0$ parce que $\lambda + \lambda^* \neq 0$. Ainsi $P_\sigma(C) \setminus \{-\lambda^*\} \subset P_\sigma(C_\theta)$. D'un autre côté, on a $P_\sigma(C_\theta) \subset P_\sigma(C)$ et $-\lambda^*$ n'est pas une valeur propre de C_θ parce que l'espace propre associé est de dimension un, engendré par w^* et $w^* \notin X_\theta$. □

Soit T un opérateur linéaire fermé dans l'espace de Banach complexe X. Le spectre essentiel de T, noté $E_\sigma(T)$, est l'ensemble des $\lambda \in \sigma(T)$ tels que au moins l'une des conditions suivantes soit satisfaite : (i) $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ n'est pas fermé ; (ii) λ est dans l'adhérence de $\sigma(T)$; (iii) $N_\lambda(T)$ est de dimension infinie, où $N_\lambda(T)$ est l'espace propre généralisé de T par rapport à λ, c'est-à-dire le plus petit sous-espace fermé de X qui contient $\cup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Ker}((\lambda - T)^k)$. Soit $\omega_0(A)$ la borne de croissance d'un semi-groupe fortement continu e^{At}, définie par $\omega_0(A) := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log(\|e^{At}\|)$. On peut montrer ([24], proposition 4.13) que

$$\omega_0(A) = \max\left\{\omega_1(A), \sup_{\lambda \in \sigma(A)\setminus E_\sigma(A)} \Re\lambda\right\},$$

où $E_\sigma(A)$ est le spectre essentiel de A. La borne de croissance essentielle est $\omega_1(A) := \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log(\alpha[e^{At}])$, où $\alpha[T]$ est la mesure de non-compacité d'un opérateur linéaire borné T. Si $\lambda \in \sigma(A)\setminus E_\sigma(A)$, alors λ est un pôle de $(\lambda - A)^{-1}$ et λ est dans le spectre ponctuel $P_\sigma(A)$ ([25], proposition 2.1).

L'équation linéarisée de (12) est $\zeta' = C\zeta$. On peut donc utiliser la proposition 4.13 de [24] pour obtenir la conclusion suivante :

Proposition 3. *Si $\omega_0(C_\theta) < 0$, alors w^* est asymptotiquement stable. S'il existe $\lambda_\dagger \in \sigma(C_\theta)$ tel que $\Re\lambda_\dagger > 0$ et*

$$\max\left\{\omega_1(C_\theta), \sup_{\lambda \in \sigma(C_\theta)\setminus(E\sigma(C_\theta)\cup\{\lambda_\dagger\})} \Re\lambda\right\} < \Re\lambda_\dagger,$$

alors w^* est instable.

Pour le système dynamique homogène (6), en utilisant le concept of croissance exponentielle asynchrone de Webb [5, 25, 26], on peut donner une condition simple de stabilité.

Définition 4.3. *Soit $T(t), t \geq 0$, un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Banach X. Alors $T(t)$, $t \geq 0$, a une croissance exponentielle asynchrone avec le taux de croissance intrinsèque $\lambda \in \mathbb{R}$ s'il existe un opérateur P de rang un dans X tel que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda t} T(t) = P$, où la limite est dans la topologie de la norme d'opérateurs.*

En appliquant le résultat de [26], on obtient

Proposition 4. *Supposons que l'opérateur linéarisé $B = A + F'[w^*]$ soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés, $T(t)$, $t \geq 0$, et qu'il y ait une croissance exponentielle asynchrone telle que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}T(t) = P$, où P est un opérateur de rang un dans X. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, si $x \in U_\delta := \{x \in X_+\backslash\{0\} : \|(I-P)x\|_X/\|Px\|_X < \delta\}$, alors $Qx := \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}p(t)$ existe, où $Qx \in \mathrm{Im}(P)$ et $Qx \neq 0$.*

Avec le résultat ci-dessus, on obtient une condition suffisante pour la stabilité des solutions exponentielles :

Proposition 5. *Un équilibre $w^* \in \Gamma$ est asymptotiquement stable au sens de Hadeler si $B = A + F'[w^*]$ a une croissance exponentielle asynchrone avec un taux de croissance intrinsèque λ^*.*

Démonstration. Supposons que $B = A+F'[w^*]$ soit le générateur d'un C_0-semi-groupe $T(t)$, $t \geq 0$, et qu'il existe un opérateur de rang un P dans X tel que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}T(t) = P$. Alors P est une projection sur l'espace propre engendré par w^* et $T(t)P = PT(t) = e^{\lambda^* t}P$. D'après la proposition 4, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U := \{x \in X_+\backslash\{0\} : \|(I-P)x\|_X/\|Px\|_X < \delta\}$ alors la limite $Qx := \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}p(t)$ existe avec $p(0) = x$, $Qx \in \mathrm{Im}(P)$ et $Qx \neq 0$. Soit K la norme d'opérateur de la fonctionnelle θ avec $|\langle\theta, \phi\rangle| \leq K\|\phi\|_X$ pour $\phi \in X$. Supposons que $\|w(0) - w^*\|_X < \epsilon < 1/(2K)$ pour $w(0) \in \Gamma$. Observons que $\|P(w(0)-w^*)\|_X \leq \|w(0)-w^*\|_X < \epsilon$, $\|(I-P)w(0)\|_X \leq \epsilon+\|P(w(0)-w^*)\|_X < 2\epsilon$ et $\|Pw(0)\|_X \geq \|w(0)\|_X - \|(I-P)w(0)\|_X > K^{-1} - 2\epsilon > 0$, parce que $Pw^* = w^*$ et $K\|w(0)\|_X \geq |\langle\theta, w(0)\rangle| = 1$. Alors $w(0) \in U_\delta$ si l'on choisit $\delta = \frac{2\epsilon K}{1-2\epsilon K}$. Considérons le système original (6) avec la condition initiale $p(0) = w(0)$. D'après notre hypothèse, $Qw(0) := \lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}p(t)$ existe, $Qw(0) \in \mathrm{Im}(P) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{Im}(P)$ est engendrée par w^*. Ainsi

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{\langle\theta, p(t)\rangle} = \frac{Qw(0)}{\langle\theta, Qw(0)\rangle} = w^*,$$

ce qui implique que w^* est asymptotiquement stable dans le système normalisé. □

On peut étendre l'idée de croissance exponentielle asynchrone aux semi-groupes non linéaires [5]. Inversement, si l'on suppose l'existence d'un équilibre exponentiellement asymptotiquement stable dans le système normalisé, alors $p(t)$ a localement une croissance exponentielle asynchrone :

Proposition 6. *Soit $z(0)$ une condition initiale non triviale. Si un équilibre $w^* \in \Gamma$ est exponentiellement asymptotiquement stable dans le système normalisé, alors il existe $C > 0$ tel que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}p(t) = Cw^*$ si le profil par âge de $p(0)$ est suffisamment proche de w^*.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $M > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que $\|w(t)-w^*\|_X \leq Me^{-\epsilon t}\|w(0) - w^*\|_X$ si $\|w(0) - w^*\|_X < \delta$. Supposons $\|w(0) - w^*\|_X < \delta$ et posons

$$F(t) := -\lambda^* t + \int_0^t H(w(s))ds = \int_0^t H(w(s) - w^*)ds.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}|F(u)-F(v)| &\leq \left|\int_u^v |H(w(s)-w^*)|ds\right| \\ &\leq \sup_{j,a}|m_j(a)-\mu(a)|\frac{M}{\epsilon}|e^{-\epsilon u}-e^{-\epsilon v}|\|w(0)-w^*\|_X,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty)$ existe. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda^* t}p(t) &= \lim_{t\to\infty} w(t)\exp\left(\int_0^t H(w(s)-w^*)ds\right)\langle\theta, p(0)\rangle \\ &= w^* e^{F(\infty)}\langle\theta, z(0)\rangle.\end{aligned}$$

Ceci montre que $p(t)$ a une croissance exponentielle asynchrone avec un taux intrinsèque de croissance λ^*. □

5 Existence de solutions exponentielles

Le système (2) a deux solutions exponentielles triviales qui correspondent à des équilibres sur le bord du système normalisé. Si $p_2 = 0$, alors il existe une solution exponentielle triviale telle que

$$p_1^*(t,a) = e^{\lambda_1 t}w_1(a), \quad w_1(a) := (c_1(a), 0),$$

où

$$c_1(a) := \frac{e^{-\lambda_1 a}\ell(a)}{\int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\ell(x)dx}$$

est le profil par âge stable de la population susceptible (avec une fécondité élevée). D'un autre côté, si $p_1 = 0$, alors il existe une autre solution exponentielle triviale telle que

$$p_2^*(t,a) = e^{\lambda_2 t}w_2(a), \quad w_2(a) := (0, c_2(a)),$$

où

$$c_2(a) := \frac{e^{-\lambda_2 a}\ell(a)}{\int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\ell(x)dx}$$

est le profil par âge stable de la population infectée (avec une fécondité basse).

5.1 Réduction à un problème de point fixe

Notre problème fondamental est maintenant de déterminer si un équilibre positif $(u^*, v^*) > 0$ existe pour le système normalisé.

Soit $w^* = (u^*, v^*) \in \Gamma$ un équilibre positif. Il résulte de (10) que

$$\begin{aligned}
\frac{du^*(a)}{da} &= -H^* u^*(a) - (\mu(a) + \pi^*(a))u^*(a), \\
\frac{dv^*(a)}{da} &= -H^* v^*(a) - \mu(a)v^*(a) + \pi^*(a)u^*(a), \\
u^*(0) &= \int_0^\infty m_1(a)u^*(a)da, \\
v^*(0) &= \int_0^\infty m_2(a)v^*(a)da,
\end{aligned}$$

où

$$\pi^*(a) := \int_0^\infty \beta(a,\sigma)v^*(\sigma)d\sigma, \quad H^* = H(w^*).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
u^*(a) &= u^*(0)\ell(a)e^{-H^* a - \int_0^a \pi^*(z)dz}, \\
v^*(a) &= v^*(0)\ell(a)e^{-H^* a} + e^{-H^* a}\ell(a)(1 - e^{-\int_0^a \pi^*(z)dz})u^*(0).
\end{aligned} \tag{13}$$

Notons que

$$\frac{d}{da}(u^*(a) + v^*(a)) = -(\mu(a) + H^*)(u^*(a) + v^*(a)),$$

d'où il résulte que

$$u^*(a) + v^*(a) = (u^*(0) + v^*(0))\ell(a)e^{-H^* a}.$$

Avec la condition $|w^*|_1 = 1$, on a

$$(u^*(0) + v^*(0)) \int_0^\infty \ell(a)e^{-H^* a}da = 1. \tag{14}$$

Comme $u^*(0) = \int_0^\infty m_1(a)u^*(a)da$, il résulte de la condition au bord pour u^* que

$$1 = \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-H^* a - \int_0^a \pi^*(\sigma)d\sigma}da. \tag{15}$$

Puisque (15) a une unique racine réelle H^* pour chaque π^*, on peut définir une fonction continue $\Psi : L^1 \to \mathbb{R}$ telle que $H^* = \Psi(\pi^*)$ vérifie (15). Autrement dit, pour tout $\phi \in L^1_+(\mathbb{R}_+)$, on a

$$1 = \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a - \int_0^a \phi(\sigma)d\sigma}da,$$

d'où $\Psi(\phi) \leq \lambda_1$ et $\Psi(0) = \lambda_1$.

En multipliant par m_2 des deux côtés de l'équation pour v^* dans (13) et en intégrant de 0 à ∞, on obtient

$$\begin{aligned} v^*(0)&\left(1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-H^*a}da\right)\\ &= u^*(0)\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-H^*a}(1-e^{-\int_0^a \pi^*(\zeta)d\zeta})da. \end{aligned}$$

Avec (14), on obtient

$$\begin{aligned} u^*(0) &= \frac{1}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a}da}\frac{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a}da}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a-\int_0^a \pi^*(z)dz}da},\\ v^*(0) &= \frac{1}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a}da}\frac{\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a}(1-e^{-\int_0^a \pi^*(z)dz})da}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a-\int_0^a \pi^*(z)dz}da}. \end{aligned}$$

En utilisant (13) et la définition de π^*, on obtient une équation de point fixe pour la force d'infection inconnue π^* :

$$\pi^*(a) = G(\pi^*)(a),$$

où G est un opérateur non linéaire de $L^1(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même défini par

$$G(\phi)(a) := \int_0^\infty \beta(a,\sigma)b_0(\phi)\ell(\sigma)e^{-\Psi(\phi)\sigma}\left[g_2(\phi)+(1-e^{-\int_0^\sigma \phi(z)dz})g_1(\phi)\right]d\sigma.$$

Les fonctions g_j $(j=1,2)$ de $L^1_+(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned} g_1(\phi) &:= \frac{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a}da}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-\int_0^a \phi(z)dz}da},\\ g_2(\phi) &:= \frac{\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a}(1-e^{-\int_0^a \phi(z)dz})da}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-\int_0^a \phi(z)dz}da}, \end{aligned}$$

avec $\phi \in L^1_+$ et

$$b_0(\phi) := \frac{1}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-\Psi(\phi)a}da}.$$

Notons que $g_1(\phi)+g_2(\phi)=1$.

Lemme 5.1. *L'opérateur G est positif et défini pour tout $\phi \in L^1_+(\mathbb{R}_+)$. De plus, on a $G(U) \subset M_0$, où $U := \{\phi \in L^1_+(\mathbb{R}) : \Psi(\phi) \geq \lambda_2\}$ et $M_0 := \{\phi \in L^1_+(\mathbb{R}) : |\phi|_\infty \leq |\beta|_\infty, |\phi|_1 \leq \kappa|\beta_1|_1|\beta_2|_\infty\}$.*

Démonstration. Observons que, pour $\phi \in L^1_+$,

$$\begin{aligned} 1&-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-\int_0^a \phi(z)dz}da\\ &> 1-\int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-\int_0^a \phi(z)dz}da = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que le dénominateur de g_j est positif. De plus, pour $\phi \in L^1_+(\mathbb{R}_+)$, on a

$$g_2(\phi) + (1 - e^{-\int_0^\sigma \phi(z)dz})g_1(\phi) = 1 - g_1(\phi)e^{-\int_0^\sigma \phi(z)dz}.$$

D'un autre côté, on a $g_1(\phi) = 1 - g_2(\phi) \leq 1$ parce que $g_2(\phi) \geq 0$. Ainsi $1 - g_1(\phi)e^{-\int_0^\sigma \phi(z)dz} \geq 0$, et l'on peut conclure que $G(\phi) \geq 0$. De plus, si $\phi \in \mathcal{D}(G)$, on a

$$1 - \int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a}da \geq 1 - \int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda_2 a}da = 0.$$

Ainsi $g_1(\phi) \geq 0$ et

$$g_2(\phi) + (1 - e^{-\int_0^\sigma \phi(z)dz})g_1(\phi) \leq 1,$$

ce qui implique que $G(\phi) \in M_0$. □

Soit $G'[0]$ la dérivée de Fréchet à l'origine. Alors, pour $\phi \in L^1_+$,

$$\begin{aligned}(G'[0]\phi)(a) = b_0(0)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\ell(\sigma)e^{-\lambda_1\sigma}d\sigma \frac{\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda_1 a}\int_0^a \phi(z)dzda}{1 - \int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda_1 a}da} \\ + b_0(0)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\ell(\sigma)e^{-\lambda_1\sigma}\int_0^\sigma \phi(z)dzd\sigma,\end{aligned}$$

où

$$b_0(0) = \frac{1}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-\lambda_1 a}da}.$$

Pour montrer l'existence d'un équilibre positif, on utilise une technique de point fixe semblable à celle de Krasnoselskii ([16], théorème 4.11).

Proposition 7. *Supposons que* $\lambda_1 - \lambda_2 > |\beta|_\infty := \sup_{(a,\sigma)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} |\beta(a,\sigma)|$ *et* $r(G'[0]) > 1$. *Soit*

$$M_\epsilon := \{\phi \in L^1_+ : |\phi|_1 \leq (1+\epsilon)C, |\phi|_\infty \leq (1+\epsilon)|\beta|_\infty\},$$

où $C := \kappa|\beta_1|_1|\beta_2|_\infty$ *et* $\epsilon > 0$ *est choisi de sorte que* $\lambda_1 - \lambda_2 > (1+\epsilon)|\beta|_\infty$. *Alors* G *a au moins un point fixe positif* ϕ^* *dans* M_0 *tel que* $g_j(\phi^*) > 0$ *pour* $j = 1, 2$.

Démonstration. Si $\phi \in M_\epsilon$, alors $\Psi(\phi) \geq \lambda_1 - (1+\epsilon)|\beta|_\infty > \lambda_2$, parce que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-(1+\epsilon)|\beta|_\infty a} &\leq \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\Psi(\phi)a-\int_0^a \phi(z)dz}da \\ &= 1 = \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\lambda_1 a}da.\end{aligned}$$

Donc $M_\epsilon \subset U$. Il résulte du lemme 4.1 que $G(M_\epsilon) \subset G(U) \subset M_0 \subset M_\epsilon$. Définissons l'opérateur Ψ_η dans L^1_+ avec un paramètre $\eta \in [0, \epsilon]$ par

$$G_\eta(x) = \begin{cases} G(x), & \text{si} \quad |x|_1 \geq \eta, \\ G(x) + (\eta - |x|_1)v_0, & \text{si} \quad |x|_1 \leq \eta, \end{cases}$$

où v_0 est le vecteur propre positif de $G'[0]$ correspondant à la valeur propre $\lambda_0 > 1$ et pour lequel $v_0 \in M_0$. Alors G_η est aussi positif, complètement continu dans L^1 et défini sur M_ϵ, avec $G_\eta(M_\eta) \subset M_\eta$. Puisque M_η est borné, convexe et fermé dans L^1, il résulte du théorème de Schauder que G_η a un point fixe $x_\eta \in M_\eta$. La norme L^1 de x_η est plus grande que η si η est assez petit. Si chaque opérateur G_η a un point fixe dont la norme L^1 n'excède pas η, alors on peut construire une suite $x_n \in L^1_+$ telle que $0 < |x_n|_1 \leq \eta_n$, où $\epsilon > \eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et $G(x_n) + (\eta_n - |x_n|_1)v_0 = x_n$. Comme $G'[0]$ est compact, on peut supposer sans perte de généralité que $G'[0](x_n/|x_n|_1)$ converge vers un élément $z \in X_+$. Observons que

$$\left(\frac{\eta_n}{|x_n|_1} - 1\right) v_0 = \frac{x_n}{|x_n|_1} - \frac{G(x_n) - Tx_n}{|x_n|_1} - G'[0]\frac{x_n}{|x_n|_1},$$

ce qui implique que

$$|v_0|_1 \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\eta_n}{|x_n|_1} - 1\right) \leq 1 + |z|_1.$$

Par conséquent, on peut supposer sans perte de généralité que $\eta_n/|x_n|_1 - 1$ converge vers un nombre $\gamma \geq 0$. La suite $x_n/|x_n|_1$ converge alors vers un vecteur $u_0 \in X_+$ tel que $|u_0|_1 = 1$ et $u_0 = G'[0]u_0 + \gamma v_0$. Ainsi $\gamma > 0$, parce que $G'[0]$ n'a pas de vecteur propre dans X_+ avec une valeur propre égale à l'unité. Soit $k_0 := \sup \Lambda$ où $\Lambda := \{k \in \mathbb{R}_+ : u_0 \geq kv_0\}$. Alors $k_0 > 0$ parce que $\gamma \in \Lambda$. D'un autre côté, $u_0 \geq G'[0](k_0 v_0) + \gamma v_0 = (k_0\lambda_0 + \gamma)v_0$, ce qui contredit la définition de k_0 parce que $k_0\lambda_0 + \gamma > k_0$. Ainsi il existe $\eta > 0$ tel que $|x_\eta|_1 \geq \eta$. Dans ce cas, $x_\eta = G(x_\eta) \in M_0$, donc x_η est un point fixe positif de G dans M_0. Notons que le point fixe obtenu ci-dessus n'est pas le point fixe sur le bord correspondant à $u^* = 0$, puisque $G_1(\phi) > 0$ pour $\phi \in M_\epsilon$. □

Comme on le montre dans la section 6, le rayon spectral de $G'[0]$ est égal à celui de l'opérateur de prochaine génération pour la population avec une fécondité basse dans le système normalisé, donc l'hypothèse de la proposition 7 n'est pas vérifiée si tous les paramètres sont indépendants de l'âge. Comme on le verra plus loin, on peut cependant construire des exemples numériques tels que l'hypothèse de 7 soit vérifiée et tels qu'il existe des solutions exponentielles coexistantes.

Une fois que π^* est donné comme point fixe de G avec $g_j(\pi^*) > 0$, la solution stationnaire positive correspondante est donnée par

$$\begin{aligned} u^*(a) &= g_1(\pi^*)\ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a - \int_0^a \pi^*(z)dz}, \\ v^*(a) &= \ell(a)e^{-\Psi(\pi^*)a}[g_2(\pi^*) + g_1(\pi^*)(1 - e^{-\int_0^a \pi^*(z)dz})]. \end{aligned} \tag{16}$$

Proposition 8. *Soit $w^* = (u^*, v^*) > 0$ un équilibre positif. Alors $\lambda_2 < H^* = H(w^*) < \lambda_1$.*

Démonstration. Soit $w^* = (u^*, v^*) > 0$ un équilibre positif. Comme $m_1(a) > m_2(a)$, on observe que

$$\int_0^\infty (m_2(a)-\mu(a))(u^*(a)+v^*(a))da < H(w^*) < \int_0^\infty (m_1(a)-\mu(a))(u^*(a)+v^*(a))da,$$

ce qui montre que

$$\frac{\int_0^\infty (m_2(a)-\mu(a))\ell(a)e^{-H^*a}da}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-H^*a}da} < H^* < \frac{\int_0^\infty (m_1(a)-\mu(a))\ell(a)e^{-H^*a}da}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-H^*a}da}.$$

Observons de plus que

$$\int_0^\infty \mu(a)\ell(a)e^{-H^*a}da = 1 - H^* \int_0^\infty \ell(a)e^{-H^*a}da.$$

Donc $J_2(H^*) < H^* < J_1(H^*)$ où

$$J_k(x) := x + \frac{\int_0^\infty m_k(a)\ell(a)e^{-xa}da - 1}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-xa}da},$$

et $\lambda_k = J_k(\lambda_k)$. Si $H^* \geq \lambda_1$, alors $J_1(H^*) \leq H^*$, ce qui contredit l'observation ci-dessus. Ainsi $H^* < \lambda_1$. On peut montrer que $\lambda_2 < H^*$ d'une manière analogue. □

6 Stabilité des solutions exponentielles

Considérons maintenant la stabilité des solutions exponentielles pour le modèle de transition démographique (2). D'après la proposition 5, il suffit de vérifier la croissance exponentielle asynchrone pour le système linéarisé près de la solution exponentielle pour déterminer la stabilité au sens de Hadeler, Iannelli et Martcheva des solutions exponentielles.

6.1 Équation variationnelle

Soit $\zeta(t,a) = p(t,a) - e^{\lambda^* t} w^*(a)$ la perturbation de la solution exponentielle $e^{\lambda^* t} w^*(a)$. Alors l'équation linéarisée est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_1(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_1(t,a) \\
&\quad - \frac{1}{\|w^*\|_X} \int_0^\infty \beta(a,\sigma)[\zeta_2(t,\sigma) w_1^*(a) + w_2^*(\sigma)\zeta_1(t,a)] d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{\|w^*\|_X^2} \int_0^\infty (\zeta_1(t,a) + \zeta_2(t,a)) da \int_0^\infty \beta(a,\sigma) w_2^*(\sigma) d\sigma w_1^*(a), \\
\frac{\partial \zeta_2(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_2(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_2(t,a) \\
&\quad + \frac{1}{\|w^*\|_X} \int_0^\infty \beta(a,\sigma)[\zeta_2(t,\sigma) w_1^*(a) + w_2^*(\sigma)\zeta_1(t,a)] d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{\|w^*\|_X^2} \int_0^\infty (\zeta_1(t,a) + \zeta_2(t,a)) da \int_0^\infty \beta(a,\sigma) w_2^*(\sigma) d\sigma w_1^*(a), \\
\zeta_1(t,0) &= \int_0^\infty m_1(a)\zeta_1(t,a) da, \\
\zeta_2(t,0) &= \int_0^\infty m_2(a)\zeta_2(t,a) da. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Elle peut s'écrire comme un problème de Cauchy semi-linéaire

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = (A + F'[w^*])\zeta(t), \qquad (18)$$

où $F'[w^*] = C + D + E$ et

$$\begin{aligned}
(C\phi)(a) &:= \begin{pmatrix} -\langle \beta(a,\cdot), \phi_2 \rangle w_1^*(a)/\|w^*\|_X \\ \langle \beta(a,\cdot), \phi_2 \rangle w_1^*(a)/\|w^*\|_X \end{pmatrix}, \\
(D\phi)(a) &:= \begin{pmatrix} -\langle \beta(a,\cdot), w_2^*/\|w^*\|_X \rangle \phi_1(a) \\ \langle \beta(a,\cdot), w_2^*/\|w^*\|_X \rangle \phi_1(a) \end{pmatrix}, \\
(E\phi)(a) &:= \begin{pmatrix} -\|w^*\|_X^{-2} \int_0^\infty (\phi_1(a) + \phi_2(a)) da \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle w_1^*(a) \\ \|w^*\|_X^{-2} \int_0^\infty (\phi_1(a) + \phi_2(a)) da \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle w_1^*(a) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Pour simplifier, on remplace $w_j^*(a)/\|w^*\|$ par $w_j^*(a)$ et on suppose que $\|w^*\| = 1$, car les multiplicateurs scalaires n'ont pas d'importance pour notre analyse. Puisque A est l'opérateur de population bien connu qui engendre un semi-groupe de population et $F'[w^*]$ est un opérateur linéaire borné, il résulte de la théorie standard des perturbations que $B := A + F'[w^*]$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$, $t \geq 0$, dans X.

Lemme 6.1. *Le générateur $B := A + F'[w^*]$ engendre un semi-groupe fortement continu, et C et E sont des perturbations compactes.*

Démonstration. On voit facilement que $A + D$ est l'opérateur de population pour une population stable à plusieurs états, donc il engendre un semi-groupe positif fortement continu ([11, 14]). Comme $C+E$ est une perturbation linéaire bornée, $B = A + F'[w^*]$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu. D'un autre côté, il résulte de l'hypothèse 1 et du critère de Fréchet-Kolmogorov pour la compacité dans L^1 que l'opérateur intégral P défini par

$$(P\phi)(a) := w_1^*(a) \int_0^\infty \beta(a,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma, \quad \phi \in L^1(\mathbb{R}_+),$$

est compact dans L^1. Pour montrer cela, soit $M \subset L^1_+$ un sous-ensemble borné. Observons que

$$\int_0^\infty |(P\phi)(a+h) - (P\phi)(a)|da \leq J_1 + J_2,$$

où

$$J_1 = \int_0^\infty |w^*(a+h) - w^*(a)| \int_0^\infty |\beta(a,\sigma)||\phi(\sigma)|d\sigma da,$$
$$J_2 = \int_0^\infty |w^*(a)| \int_0^\infty |\beta(a+h,\sigma) - \beta(a,\sigma)||\phi(\sigma)|d\sigma da.$$

Alors

$$J_1 \leq |\beta|_\infty |\phi|_1 \int_0^\infty |w^*(a+h) - w^*(a)|da,$$
$$J_2 \leq |w^*|_\infty \int_0^\infty \int_0^\infty |\beta(a+h,\sigma) - \beta(a,\sigma)|da|\phi(\sigma)|d\sigma,$$

ce qui montre que $\lim_{h\to 0}(J_1+J_2) = 0$ uniformément pour $\phi \in M$ si l'on adopte la convention que $w^* = 0$ et $\beta(\cdot,\sigma) = 0$ pour $a < 0$. On voit facilement que l'image de M par P est un ensemble borné et que $\lim_{h\to\infty} \int_h^\infty |(P\phi)(a)|da \to 0$ uniformément pour $\phi \in P(M)$. D'après le critère pour la compacité dans L^1, on sait que P est un opérateur compact, donc C aussi. Avec un raisonnement analogue, on peut montrer que E est aussi un opérateur compact. □

Lemme 6.2. *Soit $\omega_1(B)$ la borne de croissance α du semi-groupe e^{tB}. Alors $\omega_1(B) = \omega_1(A+D) \leq -\underline{\mu}$.*

Démonstration. Il résulte de la proposition 4.14 dans [24] que $\omega_1(B) = \omega_1(A + D)$. La décomposition $e^{(A+D)t} =: S(t) = U(t) + W(t)$ du semi-groupe $e^{(A+D)t}$, où

$$(U(t)\phi)(a) = \begin{cases} 0 & a \in (0,t) \\ (S(t)\phi)(a) & a \in (t,\infty) \end{cases}, \quad W(t)\phi)(a) = \begin{cases} (S(t)\phi)(a) & a \in (0,t) \\ 0 & a \in (t,\infty) \end{cases},$$

est bien connue (voir par exemple la définition 3.8 de [24]). On sait aussi que $W(t)$ est un opérateur compact, donc $\alpha[W(t)] = 0$ (proposition 3.17 dans [24]). D'un autre côté, on peut montrer que $\|U(t)\phi\|_X \leq e^{-\underline{\mu}t}\|\phi\|_X$, parce que

$$\int_0^\infty \|(U(t)\phi)(a)\|_X da \leq \int_t^\infty \|L(a,a-t)\|\|\phi(a-t)\|_X da,$$

où $L(a,s)$, $a \geq s$ est la matrice de survie engendrée par la matrice d'intensité de transition

$$Q(a) := \begin{pmatrix} -\mu(a) - \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle & 0 \\ \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle & -\mu(a) \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient $\|L(a,s)\| \leq e^{-\underline{\mu}(a-s)}$ (Lemme 1.1 dans [11]). Puis $\alpha[U(t)] \leq \|U(t)\| \leq e^{-\underline{\mu}t}$, d'où $\omega_1(A+D) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \alpha[S(t)]}{t} \leq -\underline{\mu}$ parce que $\alpha[S(t)] \leq \alpha[U(t)] + \alpha[W(t)]$ (théorème 4.6 dans [24]). □

Considérons de nouveau l'équation résolvante $(\lambda - B)^{-1} f = \phi$, où $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(B)$, $w^* = (w_1^*, w_2^*)$ et $f = (f_1, f_2) \in X$. Alors

$$\begin{aligned} &\phi_1'(a) + (\lambda + \mu(a))\phi_1(a) + \langle \beta(a,\cdot), \phi_2 \rangle w_1^*(a) \\ &\qquad + \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle \phi_1(a) + \eta(\phi) \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle w_1^*(a) = f_1(a), \\ &\phi_2'(a) + (\lambda + \mu(a))\phi_2(a) - \langle \beta(a,\cdot), \phi_2 \rangle w_1^*(a) \\ &\qquad - \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle \phi_1(a) - \eta(\phi) \langle \beta(a,\cdot), w_2^* \rangle w_1^*(a) = f_2(a), \end{aligned}$$

où η est défini par

$$\eta(\phi) := \int_0^\infty (\phi_1(a) + \phi_2(a)) da.$$

En utilisant la formule de variation de la constante pour (27), on a

$$\begin{aligned} \phi_1(a) =& \langle m_1, \phi_1 \rangle \ell(a) e^{-\lambda a} + \int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} [f_1(\sigma) - (F_3\phi_2)(\sigma) w_1^*(\sigma) \\ &- (F_3 w_2^*)(\sigma)\phi_1(\sigma) - \eta(\phi)(F_3 w_2^*)(\sigma) w_1^*(\sigma)] d\sigma, \\ \phi_2(a) =& \langle m_2, \phi_2 \rangle \ell(a) e^{-\lambda a} + \int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} [f_2(\sigma) + (F_3\phi_2)(\sigma) w_1^*(\sigma) \\ &+ (F_3 w_2^*)(\sigma)\phi_1(\sigma) + \eta(\phi)(F_3 w_2^*)(\sigma) w_1^*(\sigma)] d\sigma, \end{aligned} \tag{19}$$

où F_3 est un opérateur dans L^1 défini par

$$(F_3\phi)(a) := \langle \beta(a,\cdot), \phi \rangle = \int_0^\infty \beta(a,\sigma)\phi(\sigma) d\sigma.$$

De plus, on définit des opérateurs linéaires positifs avec un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\begin{aligned} (F_k(\lambda)\phi)(a) &:= \langle m_k, \phi \rangle \ell(a) e^{-\lambda a}, \quad (k = 1, 2), \\ (F_4(\lambda)\phi)(a) &:= \int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} e^{-\lambda(a-\sigma)} \phi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Lemme 6.3. *Soit $\Lambda := \{z \in \mathbb{C} : \Re\lambda > -\underline{\mu}\}$. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $F_k(\lambda)$ est un opérateur positif de rang un de $L^1_+(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même. De plus, F_3 est un opérateur positif compact dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Démonstration. La première affirmation est claire puisque $\ell(a)e^{-\lambda a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si $\lambda \in \Lambda$. Soit $M := \{\phi \in L^1(\mathbb{R}_+) : |\phi|_1 \leq 1\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il résulte de l'hypothèse 1 que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty |(F_3\phi)(a+h) - (F_3\phi)(a)|da \\ &\quad \leq \int_0^\infty d\sigma \int_0^\infty |\beta(a+h,\sigma) - \beta(a,\sigma)|da|\phi(\sigma)| \to 0 \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

uniformément pour $\phi \in M$. De plus, $F_3(M)$ est un ensemble borné et

$$\lim_{h\to\infty} \int_h^\infty |(F_3\phi)(a)|da = 0,$$

uniformément pour $\phi \in M$. Il résulte du critère de compacité dans L^1 que F_3 est un opérateur compact. □

L'équation (19) s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= F_1(\lambda)\phi_1 + F_4(\lambda)[f_1 - w_1^* F_3\phi_2 - \phi_1 F_3 w_2^* - \eta(\phi)w_1^* F_3 w_2^*], \\ \phi_2 &= F_2(\lambda)\phi_2 + F_4(\lambda)[f_2 + w_1^* F_3\phi_2 + \phi_1 F_3 w_2^* + \eta(\phi)w_1^* F_3 w_2^*].\end{aligned} \tag{20}$$

Donc

$$\phi = V(\lambda)\phi + J(\lambda)f, \tag{21}$$

où $J(\lambda)\phi := (F_4(\lambda)\phi_1, F_4(\lambda)\phi_2)^{\mathrm{T}}$ et $V(\lambda)$ est un opérateur compact de $X := L^1(\mathbb{R}_+) \times L^1(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même défini par

$$V(\lambda)\phi := \begin{pmatrix} F_1(\lambda)\phi_1 - F_4(\lambda)[w_1^* F_3\phi_2 + \phi_1 F_3 w_2^* + \eta(\phi)w_1^* F_3 w_2^*] \\ F_2(\lambda)\phi_2 + F_4(\lambda)[w_1^* F_3\phi_2 + \phi_1 F_3 w_2^* + \eta(\phi)w_1^* F_3 w_2^*] \end{pmatrix}.$$

Puisque $I - V(\lambda)$ est inversible lorsque la partie réelle de λ est grande, et puisque $V(\lambda)$ est une famille analytique d'opérateurs compacts dans Λ, $(I - V(\lambda))^{-1}$ est méromorphe dans Λ [20] et

$$\phi = (\lambda - B)^{-1}f = (I - V(\lambda))^{-1}J(\lambda)f, \tag{22}$$

pour λ avec une grande partie réelle. On a donc le lemme suivant :

Lemme 6.4. *Pour le générateur linéarisé B, supposons que $\Lambda \cap \sigma(B) \neq \emptyset$. Alors*

$$\begin{aligned}&\sigma(B) \cap \Lambda = P_\sigma(B) \cap \Lambda = \Sigma := \{\lambda \in \Lambda : 1 \in P_\sigma(V(\lambda))\}, \\ &\omega_0(B) = s(B) = \sup\{\Re\lambda : \lambda \in \Lambda \cap P_\sigma(B)\},\end{aligned}$$

où $s(B) := \sup\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(B)\}$ est la borne spectrale de B.

Démonstration. Puisque $\sup_{\lambda\in E_\sigma(B)} \Re\lambda \leq \omega_1(B) \leq -\underline{\mu}$, Λ ne contient pas de spectre essentiel. D'après le lemme 6.2 et le théorème de Browder ([24], proposition 4.11), si $\lambda \in \sigma(B) \cap \Lambda$, alors $\lambda \in P_\sigma(B)$ et λ est un pôle de la résolvante $(\lambda - B)^{-1}$. Ceci prouve la première partie. D'après le résultat de Webb ([24], propostion 4.13), $\omega_0(B) = \max\{\omega_1(B), \sup_{\sigma(B)\setminus E_\sigma(B)} \Re\lambda\}$, et la deuxième partie en résulte. □

La valeur propre λ^* est dite simple si c'est une valeur propre isolée et si la dimension du sous-espace propre algébrique est égale à l'unité. Le sous-espace propre algébrique est l'image de l'opérateur de projection

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta - B)^{-1} d\zeta,$$

où Γ est un petit cercle orienté dans le sens positif dans $\rho(B)$ qui entoure λ^* mais exclut le reste du spectre de B [1, 15, 28]. La valeur propre réelle λ^* est appelée valeur propre dominante si $\lambda^* > \Re z$ pour tout $z \in \sigma(B) \setminus \{\lambda^*\}$ [4].

Proposition 9. *Si $\lambda^* > -\underline{\mu}$ est la valeur propre dominante simple de B, alors w^* est localement stable dans le système normalisé.*

Démonstration. D'après la proposition 5, il suffit de montrer que le semi-groupe linéarisé e^{tB} a une croissance exponentielle asynchrone avec le taux de croissance intrinsèque λ^*. Pour voir cela, il suffit de vérifier trois conditions [5] : (i) $\omega_1(B) < \lambda^*$, (ii) $\lambda^* > \Re z$ pour tout $z \in \sigma(B) \setminus \{\lambda^*\}$, (iii) λ^* est une valeur propre simple. Comme $F'[w_1]$ est une perturbation compacte, il en résulte que $\omega_1(B) = \omega_1(A) \leq -\underline{\mu}$. Ceci montre (i). Puisque $\lambda^* > -\underline{\mu}$ est la valeur propre dominante simple de B, les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées. □

6.2 Stabilité de la solution exponentielle avec une fécondité élevée

On étudie maintenant le problème d'invasion par une population avec une faible fécondité d'une population stable avec une fécondité élevée. Autrement dit, on étudie la stabilité de la solution exponentielle avec une distribution par âge $w^* = (c_1, 0)$. Soit B_1 l'opérateur linéarisé de B en $w^* = (c_1, 0)$. Alors $D = E = 0$ et $(\lambda - B_1)^{-1} = (I - V(\lambda))^{-1} J(\lambda)$, où

$$V(\lambda)\phi = \begin{pmatrix} F_1(\lambda)\phi_1 - F_4(\lambda)c_1F_3\phi_2 \\ F_2(\lambda)\phi_2 + F_4(\lambda)c_1F_3\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Soit Π_j $(j = 1, 2)$ l'ensemble de nombres complexes défini par

$$\Pi_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : \int_0^\infty m_j(a)\ell(a)e^{-za}da = 1 \right\}.$$

On sait bien qu'il existe une unique racine réelle λ_j dans Π_j et que $\Re z_j < \lambda_j$ pour tout $z_j \in \Pi_j \setminus \{\lambda_j\}$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda \setminus \Pi_2$, on définit l'opérateur $K_2(\lambda)$ par

$$\begin{aligned}(K_2(\lambda)\phi)(a) &:= c_1(a)F_3(I-F_2(\lambda))^{-1}F_4(\lambda)\phi(a)\\ &= \frac{c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\ell(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda a}da}\int_0^\infty m_2(a)\int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}e^{-\lambda(a-\sigma)}\phi(\sigma)d\sigma da\\ &\quad + c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\int_0^\sigma \frac{\ell(\sigma)}{\ell(\eta)}e^{-\lambda(\sigma-\eta)}\phi(\eta)d\eta d\sigma,\end{aligned} \tag{23}$$

qui est positif si $\lambda > \lambda_2$.

Lemme 6.5. *Pour tout $\lambda > \lambda_2$, $K_2(\lambda)$ est un opérateur compact sans support*[3].

Démonstration. La compacité de $K_2(\lambda)$ résulte immédiatement de l'hypothèse 1. Observons que $(K_2(\lambda)\phi)(a) \geq c_1(a)\beta_1(a)\kappa(\phi)$, où

$$\kappa(\phi) := \int_0^\infty \beta_2(\sigma)\int_0^\sigma \frac{\ell(\sigma)}{\ell(\eta)}e^{-\lambda(\sigma-\eta)}\phi(\eta)d\eta d\sigma.$$

Alors $\kappa(\phi) > 0$ si $\phi \in L^1_+(\mathbb{R}_+)\setminus\{0\}$, parce que β_2 est un point quasi-intérieur de L^1_+. En appliquant plusieurs fois $K_2(\lambda)$ à $(K_2(\lambda)\phi)(a) \geq c_1(a)\beta_1(a)\kappa(\phi)$, on obtient

$$(K_2(\lambda)^n\phi)(a) \geq \kappa(\phi)\kappa(c_1\beta_1)^{n-1}c_1(a)\beta_1(a).$$

Pour tout $h^* \in (L^1_+)^*$, prenons le crochet de dualité

$$\langle h^*, K_2^n(\lambda)\phi\rangle \geq \kappa(\phi)\kappa(c_1\beta_1)^{n-1}\langle h^*, c_1\beta_1\rangle > 0,$$

parce que $c_1\beta_1$ est un point quasi-intérieur. Ainsi $K_2(\lambda)$ est sans support. □

Lemme 6.6. *$\sigma(B_1)\cap\Lambda = P_\sigma(B_1)\cap\Lambda = \Sigma_H$, où $\Sigma_H := (\Pi_1\cap\Lambda)\cup\{z\in\Lambda\setminus\Pi_2 : 1\in P_\sigma(K_2(z))\}$.*

Démonstration. D'après le lemme 6.5, on a $\sigma(B_1)\cap\Lambda = P_\sigma(B_1)\cap\Lambda$. D'après les équations linéarisées (17), on voit facilement que $\lambda\in\Pi_1\cap\Lambda$ est une valeur propre triviale de B_1 associée avec le vecteur propre $(e^{-\lambda a}\ell(a), 0)$, tandis que $\lambda\in\Pi_2\cap\Lambda$ n'est pas une valeur propre de B_1. Il résulte de notre hypothèse que $\Pi_1\cap\Pi_2 = \emptyset$. On calcule ensuite la résolvante $(\lambda - B_1)^{-1}$. Si $\lambda\in\Lambda\setminus\Pi_2$, alors $(I-F_2(\lambda))^{-1}$ existe et

$$(I-F_2(\lambda))^{-1}g(a) = g(a) + \frac{\ell(a)e^{-\lambda a}}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda a}da}\int_0^\infty m_2(a)g(a)da.$$

Avec la deuxième équation dans l'équation resolvante $\phi = (\lambda - B_1)^{-1}f$, on obtient

$$\phi_2 = (I-F_2(\lambda))^{-1}(F_4(\lambda)f_2 + F_4(\lambda)c_1F_3\phi_2).$$

3. Pour les définitions et les résultats pour les opérateurs sans support, le lecteur peut consulter [14].

Comme $K_2(\lambda)$ avec $\lambda \in \Lambda$ est un opérateur compact, $(1-K_2(\lambda))^{-1}$ existe si $1 \notin P_\sigma(K_2(\lambda))$ et $\lambda \in \Lambda \setminus \Pi_2$. Donc si $\lambda \notin \Sigma$, alors on peut calculer $c_1F_3\phi_2$:

$$c_1F_3\phi_2 = (I-K_2(\lambda))^{-1}c_1F_3(I-F_2(\lambda))^{-1}F_4(\lambda)f_2.$$

On obtient

$$\phi_2 = (I-F_2(\lambda))^{-1}(F_4(\lambda)f_2 + F_4(\lambda)(I-K_2(\lambda))^{-1}c_1F_3(I-F_2(\lambda))^{-1}F_4(\lambda)f_2). \tag{24}$$

Une fois que ϕ_2 est calculé à partir de (24), ϕ_1 se calcule pourvu que $\lambda \notin \Pi_1$ avec

$$\phi_1 = (I-F_1(\lambda))^{-1}(f_1 - F_4(\lambda)c_1F_3\phi_2.$$

On sait ensuite que $\Lambda \setminus \Sigma_H \subset \rho(B_1)$, où $\rho(B_1)$ est l'ensemble résolvant pour B_1, et donc $\sigma(B_1) \cap \Lambda \subset \Sigma_H$. Inversement, supposons que $\lambda \in \Sigma$. Alors il existe un vecteur $\psi \in X$ tel que $K_2(\lambda)\psi = \psi$. Ainsi B_1 a un vecteur propre associé à λ donné par (ϕ_1, ϕ_2), où

$$\begin{aligned}
\phi_2(a) =& \frac{\ell(a)e^{-\lambda a}}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda a}da}\int_0^\infty m_2(a)\int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}e^{-\lambda(a-\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma da \\
&+ \int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}e^{-\lambda(a-\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma, \\
\phi_1(a) =& -\frac{\ell(a)e^{-\lambda a}}{1-\int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\lambda a}da}\int_0^\infty m_1(a)\int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}e^{-\lambda(a-\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma da \\
&- \int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}e^{-\lambda(a-\sigma)}\psi(\sigma)d\sigma.
\end{aligned}$$

Donc $\Sigma_H \subset P_\sigma(B_1) \cap \Lambda$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 6.7. *Posons* $\Sigma_{H,2} := \{z \in \Lambda \setminus \Pi_2 : 1 \in P_\sigma(K_2(z))\}$. *Alors il existe* $\lambda_d \in \Sigma_{H,2} \cap \mathbb{R}$ *tel que* $\Re\lambda \leq \lambda_d$ *pour tout* $\lambda \in \Sigma_{H,2} \setminus \{\lambda_d\}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \Sigma_2$. Comme $K_2(z)$, $z \in]\lambda_2, \infty[$, est un opérateur positif et sans support, son rayon spectral $r(K_2(z))$ est une fonction décroissante de $z \in]\lambda_2, \infty[$. Pour $\Re\lambda > \lambda_2$, on a

$$\langle F_\lambda, \phi\rangle c_1\beta_1 \leq K_2(\lambda)\phi \leq \kappa\langle F_\lambda, \phi\rangle c_1\beta_1, \quad \phi \in L^1_+(\mathbb{R}_+),$$

où F_λ est une fonctionnelle strictement positive donnée par

$$\begin{aligned}
\langle F_\lambda, \phi\rangle :=& \frac{\int_0^\infty \beta_2(\sigma)\ell(\sigma)e^{-\lambda\sigma}d\sigma}{1-\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda a}da}\int_0^\infty m_2(a)\int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(s)}e^{-\lambda(a-s)}\phi(s)dsda \\
&+ \int_0^\infty \beta_2(\sigma)\int_0^\sigma \frac{\ell(\sigma)}{\ell(s)}e^{-\lambda(\sigma-s)}\phi(s)dsd\sigma,
\end{aligned}$$

et $c_1\beta_1$ est un point quasi-intérieur. Soit f_λ le vecteur propre adjoint de $K_2(\lambda)$ associé avec le rayon spectral $r(K_2(\lambda))$, qui est positif vue l'estimation ci-dessus

(voir [16], théorème 2.5). Alors il résulte de l'estimation ci-dessus que

$$\begin{aligned}\langle F_\lambda, c_1\beta_1\rangle\langle f_\lambda, c_1\beta_1\rangle &\leq \langle f_\lambda, K_2(\lambda)c_1\beta_1\rangle \\ &= r(K_2(\lambda))\langle f_\lambda, c_1\beta_1\rangle \leq \kappa\langle F_\lambda, c_1\beta_1\rangle\langle f_\lambda, c_1\beta_1\rangle,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\langle F_\lambda, c_1\beta_1\rangle \leq r(K_2(\lambda)) \leq \kappa\langle F_\lambda, c_1\beta_1\rangle$. Ainsi on obtient

$$\lim_{\lambda\downarrow\lambda_2} r(K_2(\lambda)) = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} r(K_2(\lambda)) = 0.$$

Comme $r(K_2(\lambda))$ est une fonction continue de $\lambda \in]\lambda_2, \infty[$, il existe une unique racine $\lambda_d \in]\lambda_2, \infty[$ telle que $r(K_2(\lambda_d)) = 1$, $\lambda_d \in]\lambda_2, \lambda_1[$ si $r(K_2(\lambda_1)) < 1$, $\lambda_d \in]\lambda_1, \infty[$ si $r(K_2(\lambda_1)) > 1$ parce que $r(K_2(\lambda))$ est décroissante. De plus, pour tout $z \in \Sigma_{H,2} \setminus \{\lambda_d\}$, on montre que $\Re z < \lambda_d$. Si $z \in \Sigma_{H,2} \setminus \{\lambda_d\}$, il existe ϕ associé à z tel que $|\phi| = |K_2(z)\phi| \leq K_2(\Re z)|\phi|$. Soit $f_{\Re z}$ le vecteur propre adjoint de $K_2(\Re z)$ associé avec le rayon spectral $r(K_2(\Re z))$. Alors $\langle f_{\Re z}, |\phi|\rangle \leq \langle f_{\Re z}, K_2(\Re z)|\phi|\rangle = r(K_2(\Re z))\langle f_{\Re z}, |\phi|\rangle$, ce qui montre que $1 \leq r(K_2(\Re z))$, et donc $\Re z \leq \lambda_d$. □

On définit un indice d'invasion $\mathbb{R}_2$ pour la population avec une fécondité basse dans le système normalisé par $\mathbb{R}_2 := r(K_2(\lambda_1))$; c'est donc le rayon spectral de $K_2(\lambda_1)$.

Proposition 10. *Si $\mathbb{R}_2 < 1$, alors l'équilibre sans infection $w^* = (c_1, 0)$ dans le système normalisé est localement stable.*

Démonstration. Il suffit de voir que $T_1(t) = e^{B_1 t}$ a une croissance exponentielle asynchrone avec un taux de croissance intrinsèque λ_1. D'après la proposition 9, il suffit de vérifier que λ_1 est la valeur propre dominante simple de B_1. D'après le lemme 6.7, il existe $\lambda_d \in]\lambda_2, \lambda_1[$ tel que $\lambda_d \geq \Re z$ pour tout $z \in \Sigma_{H,2}$ si $\mathbb{R}_2 < 1$, λ_1 est dominant dans Π_1 et $\omega_1(B_1) \leq -\underline{\mu} < \lambda_2$. Alors λ_1 est la valeur propre dominante. D'après le lemme 6.6, λ_1 est un pôle simple de la résolvante $(\lambda - B_1)^{-1}$ et l'espace propre correspondant est de dimension un, donc c'est une valeur propre simple. La projection sur le sous-espace propre algébrique est donnée par

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - B_1)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est une courbe fermée orientée positivement qui entoure λ_1 mais aucun autre point de $\sigma(B_1)$. Observons que pour tout $x \in X$

$$(\lambda_1 - B_1)P_1 x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_1 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1} x d\lambda = 0,$$

parce que $(\lambda_1 - B_1)(\lambda - B_1)^{-1}x = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda - B_1)^{-1}x + x$ est une fonction analytique de λ. Alors $P_1 x \in \mathrm{Ker}(\lambda_1 - B_1)$, qui est un espace de dimension un engendré par un vecteur propre associé à λ_1. Donc le sous-espace propre algébrique est de dimension un. Ainsi $T_1(t) = e^{tB_1}$, $t \geq 0$, a une croissance exponentielle asynchrone avec le taux de croissance intrinsèque λ_1 et il existe un opérateur de rang un P_1 dans X tel que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_1 t}T_1(t) = P_1$. D'après la proposition 5, l'équilibre sans infection $w^* = (c_1, 0)$ est localement stable si $\mathbb{R}_2 < 1$. □

6.3 Reproductivités

Pour interpréter biologiquement la condition de stabilité $\mathbb{R}_2 < 1$, on introduit ici la notion de reproductivité. Supposons qu'un petit nombre de personnes infectées apparaissent dans la population p_1^*. Alors la dynamique initiale de la population avec une basse fécondité dans le système normalisé est décrite par le système linéarisé suivant dans l'espace $X_2 := L^1(\mathbb{R}_+)$:

$$\frac{dv}{dt} = (A_2 - \lambda_1)v + Pv, \tag{25}$$

où A_2 est l'opérateur de population standard défini par

$$(A_2\phi)(a) := -\frac{d\phi(a)}{da} - \mu(a)\phi(a)$$

et le domaine

$$D(A_2) = \left\{\phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+) : \phi(0) = \int_0^\infty m_2(a)\phi(a)da\right\},$$

et P est la perturbation bornée donnée par

$$(P\phi)(a) := c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma.$$

Autrement dit, la perturbation $v(t,a)$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial a} &= -(\lambda_1 + \mu(a))v(t,a) + c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,b)v(t,b)db, \\ v(t,0) &= \int_0^\infty m_2(a)v(t,a)da. \end{aligned} \tag{26}$$

La solution intégrée de (25) vérifie

$$v(t) = e^{(A_2-\lambda_1)t}v(0) + \int_0^t e^{(A_2-\lambda_1)(t-s)}Pv(s)ds.$$

En appliquant P des deux côtés de cette équation, on obtient

$$Pv(t) = Pe^{(A_2-\lambda_1)t}v(0) + P\int_0^t e^{(A_2-\lambda_1)(t-s)}Pv(s)ds,$$

où $Pv(t)$ donne la prévalence de ceux nouvellement infectés horizontalement. Cette équation décrit le processus de renouvellement pour la population transmise horizontalement. Comme

$$\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)e^{-\lambda_1 a}da < 1,$$

l'opérateur de prochaine génération pour la transmission horizontale dans le système normalisé en $w = w_1$ se calculate ainsi :

$$\mathcal{K}_2 = P \int_0^\infty e^{(A_2-\lambda_1)t} dt = P(\lambda_1 - A_2)^{-1}, \tag{27}$$

puisque $\lambda_1 \in \rho(A_2)$. On voit facilement que $\mathcal{K}_2 = K_2(\lambda_1)$, qui s'écrit aussi

$$(\mathcal{K}_2\phi)(a) = \int_0^\infty k(a,b)\phi(b)db \tag{28}$$

avec le noyau

$$\begin{aligned} k(a,b) = & c_1(a) \int_b^\infty \beta(a,\sigma)\, \frac{\ell(\sigma)}{\ell(b)}\, e^{-\lambda_1(\sigma-b)}\, d\sigma \\ & + \frac{c_1(a) \int_0^\infty \beta(a,\sigma)\, \ell(\sigma)\, e^{-\lambda_1\sigma}\, d\sigma}{1 - \int_0^\infty m_2(\sigma)\, \ell(\sigma)\, e^{-\lambda_1\sigma} d\sigma} \int_b^\infty m_2(\sigma)\, e^{-\lambda_1(\sigma-b)}\, \frac{\ell(\sigma)}{\ell(b)}\, d\sigma. \end{aligned}$$

D'après le lemme 6.7, $P_\sigma(A_2 + P) \cap \Lambda = \{z \in \Lambda \setminus \Pi_2 : 1 \in P_\sigma(K_2(z))\}$ a une valeur propre dominante λ_d telle que $\lambda_d \in]\lambda_2, \lambda_1[$ si $\mathbb{R}_2 < 1$ et $\lambda_d \in]\lambda_1, \infty[$ si $\mathbb{R}_2 > 1$. Donc le paramètre malthusien de la population nouvellement infectée horizontalement Pv est positif si $\mathbb{R}_2 = r(\mathcal{K}_2) > 1$, tandis qu'il est négatif si $\mathbb{R}_2 = r(\mathcal{K}_2) < 1$. Donc $\mathbb{R}_2 = r(K_2(\lambda_1)) = r(\mathcal{K}_2)$ donne la reproductivité de la population normalisée avec une faible fécondité. Notons que $\mathbb{R}_2$ est une fonction croissante de $\beta(\cdot,\cdot)$ et que $\mathbb{R}_2 \to 0$ si $|\beta|_\infty \to 0$. Quand tous les coefficients ne dépendent pas de l'âge, on obtient

$$k(a,b) = \frac{\beta\, m_1}{m_1 - m_2}\, e^{-m_1 a}, \quad \mathbb{R}_2 = \int_0^\infty k(a,a)\, da = \frac{\beta}{m_1 - m_2},$$

comme dans la section 2 puisque $\lambda_j = m_j - \mu$.

De plus, la condition d'invasion $\mathbb{R}_2 > 1$ est l'une des conditions pour l'existence de solutions exponentielles non triviales (endémicité de la population à baisse fécondité). On peut montrer en fait ce qui suit.

Proposition 11. *Supposons que $\mathcal{K}_2$ et $G'[0]$ soient des opérateurs compacts positifs sans support. Alors $r(G'[0]) = r(\mathcal{K}_2) = \mathbb{R}_2$.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, $\mathcal{K}_2$ (et $G'[0]$) a une valeur propre dominante qui correspond à un vecteur propre positif, qui est l'unique vecteur propre (à un facteur constant près) dans le cône positif. Soient ψ et ϕ les vecteurs propres positifs de $\mathcal{K}_2$ et $G'[0]$, respectivement, de sorte que $\mathcal{K}_2\psi = r(\mathcal{K}_2)\psi$ et $G'[0]\phi = r(G'[0])\phi$. On voit alors facilement que $\mathcal{K}_2 U = UG'[0]$, où U est un opérateur de multiplication de L^1 dans lui même défini par $(Uf)(a) := e^{-\lambda_1 a}\ell(a)f(a)$. Donc $UG'[0]\phi = r(G'[0])U\phi = \mathcal{K}_2 U\phi$, ce qui implique que $r(G'[0])$ est la valeur propre $\mathcal{K}_2$ qui correspond au vecteur propre positif $U\phi$; donc $U\phi$ est proportionnel à ψ et $r(\mathcal{K}_2) = r(G'[0])$. □

Ainsi, l'instabilité de la population avec une fécondité élevée suggère l'existence de solutions exponentielles non triviales avec coexistence.

D'un autre côté, on doit remarquer que la condition sous-critique $\mathbb{R}_2 < 1$ n'est pas une condition suffisante pour la stabilité de la population avec une fécondité élevée. Observons que pour $w^* = (c_1, 0)$ dans (17), l'équation de variation pour la population avec une fécondité basse est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_2(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_2(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_2(t,a) + c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\zeta_2(t,\sigma)d\sigma, \\ \zeta_2(t,0) &= \int_0^\infty m_2(a)\zeta_2(t,a)da, \end{aligned} \tag{29}$$

qui a une valeur propre dominante $\lambda_d \in]\lambda_2, \lambda_1[$ si $\mathbb{R}_2 < 1$, et elle est positive si $\lambda_2 \geq 0$. Dans ce cas, la population avec une fécondité faible peut grandir mais sa prévalence tend vers 0.

Pour étudier cette extinction relative, calculons la reproductivité $R_{0,2}$ pour la population avec une fécondité faible. Reformulons d'abord (29) comme une équation abstraite sur l'espace des états à la naissance $Z := \mathbb{R}_+ \times L^1(\mathbb{R}_+)$[13, 14] :

$$\frac{dz}{dt} = (\mathcal{B} + \mathcal{C})z, \tag{30}$$

où $z = (0, \phi) \in Z_0 := \{0\} \times L^1(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(0,\phi) &= (-\phi(0), -\phi'(a) - \mu(a)\phi(a)), \\ \mathcal{C}(0,\phi) &= \left(\int_0^\infty m_2(a)\phi(a)da, c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\phi(\sigma)d\sigma\right), \end{aligned}$$

pour $(0, \phi) \in Z_0$. En utilisant la technique bien connue pour formuler l'opérateur de prochaine génération $\mathbb{K}_2$ [14, 21], on a pour $(z_1, z_2) \in Z$

$$\begin{aligned} &\mathbb{K}_2(z_1,z_2) = \mathcal{C}(-\mathcal{B})^{-1}(z_1,z_2) \\ &= \left(\int_0^\infty m_2(a)\ell(a)daz_1 + \int_0^\infty m_2(a)\int_0^a \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}z_2(\sigma)d\sigma da, \right. \\ &\qquad \left. c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\left[\ell(\sigma)z_1 + \int_0^\sigma \frac{\ell(\sigma)}{\ell(\eta)}z_2(\eta)d\eta\right]d\sigma\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Le paramètre malthusien de $z(t)$ est λ_d et on a la relation signe(λ_d) = signe$(r(\mathbb{K}_2) - 1)$. La reproductivité est définie par $R_{0,2} = r(\mathbb{K}_2)$.

De la même manière, on peut formuler l'opérateur de prochaine génération associé avec l'équation normalisée (26) :

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{K}}_2(z_1,z_2) = \mathcal{C}(-(\mathcal{B} - \lambda_1))^{-1}(z_1,z_2) \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-\lambda_1 a}m_2(a)\ell(a)daz_1 + \int_0^\infty m_2(a)\int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)}\frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)}z_2(\sigma)d\sigma da, \right. \\ &\qquad \left. c_1(a)\int_0^\infty \beta(a,\sigma)\left[e^{-\lambda_1\sigma}\ell(\sigma)z_1 + \int_0^\sigma e^{-\lambda_1(\sigma-\eta)}\frac{\ell(\sigma)}{\ell(\eta)}z_2(\eta)d\eta\right]d\sigma\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Alors le paramètre malthusien de $\zeta(t)$ est $\lambda_d - \lambda_1$ et on a la relation signe$(\lambda_d - \lambda_1) =$ signe$(r(\tilde{\mathbb{K}}_2) - 1)$, de sorte qu'on peut définir la reproductivité pour la prévalence de la population avec une faible fécondité par $\tilde{R}_{0,2} := r(\tilde{\mathbb{K}}_2)$. Si l'on suppose que tous les paramètres sont indépendants de l'âge, on trouve à nouveau (4).

Lemme 6.8. signe$(\tilde{R}_{0,2} - 1) =$ signe$(\mathbb{R}_2 - 1)$.

Démonstration. Supposons que $\tilde{R}_{0,2} > 1$. Soit $(z_1, z_2) \in Z$ un vecteur propre positif de $\tilde{\mathbb{K}}_2$ associé avec la valeur propre $\tilde{R}_{0,2}$. On a alors les inégalités :

$$z_1 < \int_0^\infty e^{-\lambda_1 a} m_2(a)\ell(a)da z_1 + \int_0^\infty m_2(a) \int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)} \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} z_2(\sigma) d\sigma da,$$
$$z_2(a) < c_1(a) \int_0^\infty \beta(a,\sigma) \left[e^{-\lambda_1 \sigma} \ell(\sigma) z_1 + \int_0^\sigma e^{-\lambda_1(\sigma-\eta)} \frac{\ell(\sigma)}{\ell(\eta)} z_2(\eta) d\eta \right] d\sigma.$$

De la première inégalité, on tire

$$z_1 < \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 a} m_2(a)\ell(a)da\right)^{-1} \int_0^\infty m_2(a) \int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)} \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} z_2(\sigma) d\sigma da.$$

En insérant l'estimation ci-dessus dans la seconde inégalité pour z_2, on conclut que $z_2 < K_2(\lambda_1) z_2$, ce qui montre que $1 < r(K_2(\lambda_1)) = \mathbb{R}_2$. Inversement, supposons $1 < \mathbb{R}_2$. Alors il existe un vecteur propre positif $\phi \in L^1$ de $K_2(\lambda_1)$ tel que $\phi < K(\lambda_1)\phi$. Choisissons $\alpha > 0$ tel que

$$\alpha = \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda_1 a} m_2(a)\ell(a)da\right)^{-1} \int_0^\infty m_2(a) \int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)} \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} \phi(\sigma) d\sigma da.$$

Alors on a

$$\alpha = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 a} m_2(a)\ell(a)da\ \alpha + \int_0^\infty m_2(a) \int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)} \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} \phi_2(\sigma) d\sigma da,$$
$$\phi < \int_0^\infty e^{-\lambda_1 a} m_2(a)\ell(a)da\ \alpha + \int_0^\infty m_2(a) \int_0^a e^{-\lambda_1(a-\sigma)} \frac{\ell(a)}{\ell(\sigma)} \phi(\sigma) d\sigma da,$$

ce qui montre que $(\alpha, \phi) < \tilde{\mathbb{K}}_2(\alpha, \phi)$. On peut conclure que $r(\tilde{\mathbb{K}}_2) = \tilde{R}_{0,2} > 1$. On sait alors que $\tilde{R}_{0,2} > 1$ si et seulement si $\mathbb{R}_2 > 1$. De la même manière, on peut montrer que $\tilde{R}_{0,2} < 1$ si et seulement si $\mathbb{R}_2 < 1$. □

Remarquons que si $\tilde{R}_{0,2} < 1 < R_{0,2}$, alors la population envahissante avec une faible fécondité peut croître mais sa prévalence tend vers 0 (extinction relative). Inversement, si $R_{0,2} < 1 < \tilde{R}_{0,2}$, alors la population envahissante avec une faible fécondité décroît, mais sa prévalence augmente dans le système normalisé (endémicité relative).

6.4 Stabilité de la solution exponentielle avec une faible fécondité

Considérons maintenant la stabilité de la solution exponentielle avec une faible fécondité, qui correspond à l'équilibre $w^* = w_2 = (0, c_2)$ dans le système normalisé. Dans ce cas, le système linéarisé (17) se réduit à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_1(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_1(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_1(t,a) - \epsilon(a)\zeta_1(t,a), \\
\frac{\partial \zeta_2(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_2(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_2(t,a) + \epsilon(a)\zeta_1(t,a), \\
\zeta_1(t,0) &= \int_0^\infty m_1(a)\zeta_1(t,a)da, \\
\zeta_2(t,0) &= \int_0^\infty m_2(a)\zeta_2(t,a)da,
\end{aligned} \tag{33}$$

où

$$\epsilon(a) := \int_0^\infty \beta(a,\sigma)c_2(\sigma)d\sigma.$$

Le système (33) est un modèle bien connu de population avec plusieurs types [14] qui a la solution exponentielle triviale $e^{\lambda_2 t}(0, c_2(a))$. D'après la théorie de la stabilité de la section 4, pour montrer la stabilité locale de la solution $e^{\lambda_2 t}(0, c_2(a))$, il suffit de vérifier que le générateur linearisé $B_2 := A + F'[w_2]$ a une croissance exponentielle asynchrone avec un taux de croissance intrinsèque λ_2 tel que $\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_2 t}T(t) = P$ soit un opérateur de rang un. Si λ_2 est la racine simple et dominante du système à plusieurs états (29), ce résultat d'ergodicité forte a déjà été démontré en utilisant la théorie des populations stables à plusieurs états [11, 14].

Définissons la reproductivité démographique R_d par le rayon spectral de la matrice de prochaine reproduction

$$\mathcal{K} := \int_0^\infty \Psi(a)da,$$

où $\Psi(a) := M(a)L(a)$, M est matrice de fécondité donnée par

$$M(a) := \begin{pmatrix} m_1(a) & 0 \\ 0 & m_2(a) \end{pmatrix},$$

et $L(a)$ est une matrice de survie donnée par la solution matricielle de $L'(a) = Q(a)L(a)$, avec $L(0) = I$ (I désigne la matrice identité) et

$$Q(a) := \begin{pmatrix} -\mu(a) - \epsilon(a) & 0 \\ \epsilon(a) & -\mu(a) \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation caractéristique est

$$\det\left(I-\int_0^\infty e^{-\lambda a}\Psi(a)da\right)$$
$$=\left(1-\int_0^\infty e^{-\lambda a}m_1(a)\ell(a)e^{-\int_0^a\epsilon(z)dz}da\right)\left(1-\int_0^\infty e^{-\lambda a}m_2(a)\ell(a)da\right).$$

Posons

$$\Sigma_{L,2}:=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:1=\int_0^\infty e^{-\lambda a}m_1(a)\ell(a)e^{-\int_0^a\epsilon(z)dz}da\right\}\cap\Lambda,$$

et soit

$$\Sigma_L:=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\det\left(I-\int_0^\infty e^{-\lambda a}\Psi(a)da\right)=0\right\}=(\Pi_2\cap\Lambda)\cup\Sigma_{L,2},$$

l'ensemble des racines caractéristiques du modèle de population à plusieurs états (33). Alors le taux de croissance intrinsèque λ_d (le paramètre malthusien) du modèle stable à plusieurs états est donné par la racine caractéristique dominante de Σ_L, et on a la relation $\text{signe}(\lambda_d)=\text{signe}(R_d-1)$.

D'après le raisonnement standard pour l'équation caractéristique de Lotka, il existe une racine réelle dominante $\lambda_3\in\Sigma_{L,2}$ telle que $\Re z<\lambda_3$ pour tout $z\in\Sigma_{L,2}\setminus\{\lambda_3\}$.

Lemme 6.9. *Supposons que* $\lambda_3>-\underline{\mu}$. *Alors* $\lambda_3\in[\lambda_1-|\beta|_\infty,\lambda_1[$ *et* $\lambda_d=\max\{\lambda_3,\lambda_2\}$.

Démonstration. L'inégalité $\lambda_3<\lambda_1$ est une conséquence directe de la définition. Comme $\epsilon(a)\le|\beta|_\infty$, on a

$$1\ge\int_0^\infty e^{-\lambda a}m_1(a)\ell(a)e^{-|\beta|_\infty a}da$$

pour $\lambda\in\Sigma_{L,2}\cap\mathbb{R}$, ce qui implique que $\lambda+|\beta|_\infty\ge\lambda_1$. Ainsi $\lambda_3\in[\lambda_1-|\beta|_\infty,\lambda_1[$. Comme λ_d est la valeur propre dominante dans Σ_L, on a $\lambda_d=\max\{\lambda_3,\lambda_2\}$. □

En utilisant un raisonnement semblable à celui du lemme 6.5, on obtient que $\sigma(B_2)\cap\Lambda=P_\sigma(B_2)\cap\Lambda=\Sigma_L\cap\Lambda$. Définissons l'indice d'invasion pour la population avec une fécondité élevée $\mathbb{R}_1$ par

$$\mathbb{R}_1:=\int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\lambda_2 a-\int_0^a\epsilon(\sigma)d\sigma}da. \tag{34}$$

Les individus susceptibles sont les envahisseurs de la population avec une fécondité faible, donc la dynamique linéarisée de leur prévalence est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_1(t,a)}{\partial t}+\frac{\zeta_1(t,a)}{\partial a}&=-(\lambda_2+\mu(a))\zeta_1(t,a)-\epsilon(a)\zeta_1(t,a),\\ \zeta_1(t,0)&=\int_0^\infty m_1(a)\zeta_1(t,a)da,\end{aligned} \tag{35}$$

Puisque (35) est un modèle bien connu de population stable, sa reproductivité est donnée par (34). Notez que $\mathbb{R}_1$ est une fonction décroissante de β. Les racines caractéristiques de (35) sont données par

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : 1 = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\lambda_2)a} m_1(a)\ell(a)e^{-\int_0^a \epsilon(z)dz} da\right\},$$

et le paramètre malthusien est $\lambda_3 - \lambda_2$. Il est positif si $\mathbb{R}_1 > 1$; il est négatif si $\mathbb{R}_1 < 1$.

On a le résultat suivant.

Proposition 12. *Si $\mathbb{R}_1 < 1$, alors la solution exponentielle avec une fécondité faible $e^{\lambda_2 t} w_2$ est localement stable, tandis qu'elle est instable au sens de Hadeler si $\mathbb{R}_1 > 1$.*

Démonstration. Posons

$$F(\lambda) := \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\lambda a - \int_0^a \epsilon(\sigma)d\sigma} da.$$

Alors $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est une fonction décroissante. Comme $F(\lambda_3) = 1$, on a $\lambda_3 < \lambda_2$ si $\mathbb{R}_1 = F(\lambda_2) < 1$. Alors $\lambda_d = \lambda_2$, donc $T_2(t) = e^{B_2 t}$, $t \geq 0$, a une croissance exponentielle asynchrone avec un taux de croissance intrinsèque λ_2. La solution exponentielle $e^{\lambda_2 t} w_2$ est donc localement stable au sens où w_2 est localement asymptotiquement stable dans le système normalisé. Si $\mathbb{R}_1 > 1$, alors $\lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_d$. Donc le système linéarisé a pour paramètre malthusien $\lambda_d > \lambda_2$ et la solution exponentielle triviale $e^{\lambda_2 t} w_2$ est instable. □

On doit remarquer que la reproductivité de l'équation variationnelle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1(t,a)}{\partial t} + \frac{\zeta_1(t,a)}{\partial a} &= -\mu(a)\zeta_1(t,a) - \epsilon(a)\zeta_1(t,a), \\ \zeta_1(t,0) &= \int_0^\infty m_1(a)\zeta_1(t,a)da, \end{aligned} \tag{36}$$

est donnée par

$$R_{0,1} = \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\int_0^a \epsilon(\sigma)d\sigma} da. \tag{37}$$

Premièrement, notons que $\mathbb{R}_1 = \tilde{R}_{0,1}$, qui est la reproductivité de la population avec une fécondité élevée près de l'équilibre complètement infecté dans le système normalisé. Si $\tilde{R}_{0,1} < 1 < R_{0,1}$, on a $0 < \lambda_3 < \lambda_2$. Dans ce cas, l'équilibre complètement infecté est localement stable dans le système normalisé, mais le nombre de personnes susceptibles (la population avec une fécondité élevée) croît (extinction relative). Inversement si $\tilde{R}_{0,1} < 1 < R_{0,1}$, on a $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$ et l'équilibre complètement infecté est instable dans le système normalisé. Mais le nombre de personnes susceptibles (la population avec une fécondité élevée) décroît (endemicité relative).

Deuxièmement, notons que la condition $\lambda_1 - \lambda_2 > |\beta|_\infty$ est suffisante pour que $\mathbb{R}_1 > 1$. Si $\lambda_1 - \lambda_2 > |\beta|_\infty$, alors

$$\mathbb{R}_1 \geq \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-(\lambda_2+|\beta|_\infty)a}da > \int_0^\infty m_1(a)\ell(a)e^{-\lambda_1 a}da = 1.$$

Donc si la différence entre les taux de naissance pour les populations avec une fécondité élevée ou faible est est suffisamment grande pour une même mortalité, alors la population stable avec une fécondité faible peut être déstabilisée par l'invasion d'individus avec une fécondité élevée et une croissance exponentielle simultanée peut se produire, bien que l'unicité et la stabilité de la solution exponentielle avec coexistence soit un problème ouvert.

7 Exemples numériques

Faisons l'hypothèse d'un mélange séparable, $\beta(a,b) = \beta_1(a)\,\beta_2(b)$. Alors le noyau (29) est de la forme $k(a,b) = f_1(a)\,g_1(b) + f_2(a)\,g_2(b)$, où

$$\begin{aligned}
f_1(a) &= c_1(a)\beta_1(a),\\
g_1(b) &= \int_b^\infty \beta_2(\sigma)\,\frac{\ell(\sigma)}{\ell(b)}\,e^{-\lambda_1(\sigma-b)}\,d\sigma\\
f_2(a) &= c_1(a)\beta_1(a),\\
g_2(b) &= \frac{\int_0^\infty \beta_2(\sigma)\,\ell(\sigma)\,e^{-\lambda_1\sigma}\,d\sigma}{1-\int_0^\infty m_2(\sigma)\,\ell(\sigma)\,e^{-\lambda_1\sigma}d\sigma}\int_b^\infty m_2(\sigma)\,\frac{\ell(\sigma)}{\ell(b)}\,e^{-\lambda_1(\sigma-b)}\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Le rayon spectral $\mathbb{R}_2$ de l'opérateur $\mathcal{K}_2$ est égal au rayon spectral d'une matrice d'ordre 2 :

$$\begin{pmatrix} \int_0^\infty f_1(a)\,g_1(a)\,da & \int_0^\infty f_2(a)\,g_1(a)\,da \\ \int_0^\infty f_1(a)\,g_2(a)\,da & \int_0^\infty f_2(a)\,g_2(a)\,da \end{pmatrix}.$$

Supposons que $\mu(a) = 0{,}02$,

$$m_1(a) = \begin{cases} 0{,}15 & \text{si } 20 < a < 40,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}, \quad m_2(a) = \begin{cases} 0{,}07 & \text{si } 20 < a < 40,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors $\lambda_1 \simeq 0{,}0180$ et $\lambda_2 \simeq -0{,}00859$. Supposons que $\beta(a,b) = \beta_1(a)\,\beta_2(b)$ avec

$$\beta_1(a) = \begin{cases} b & \text{si } a < 50,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \qquad \beta_2(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 50,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

où le paramètre $b = |\beta|_\infty$ varie. La figure 3 montre comment $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ dépendent de b. On voit qu'il y a une plage de valeurs pour b où les deux nombres sont au-dessus de 1, de sorte qu'une fraction susceptible et une fraction infectée peuvent coexister.

Posons $N_1(t) = \int_0^\infty p_1(t,a)\,da$ et $N_2(t) = \int_0^\infty p_2(t,a)\,da$. La figure 4 montre deux exemples ($b = 0{,}03$ et $b = 0{,}04$) où les deux fractions coexistent et la population totale croît ou décroît asymptotiquement. Dans les deux exemples, $\mathbb{R}_1 > 1$

et $\mathbb{R}_2 > 1$; la condition initiale est $p_1(a) = 100\, e^{-\mu a}$ et $p_2(a) = p_1(a)/2$. Si l'on compare avec la colonne de gauche de la figure 2, où $\lambda_2 < 0$, le résultat serait semblable à la figure du haut pour $b = 0{,}005$, à celle du milieu pour $b = 0{,}02$ et à celle du bas pour $b = 0{,}08$. Donc la figure 4 montre deux cas supplémentaires qui ne peuvent pas se produire lorsque les coefficients ne dépendent pas de l'âge.

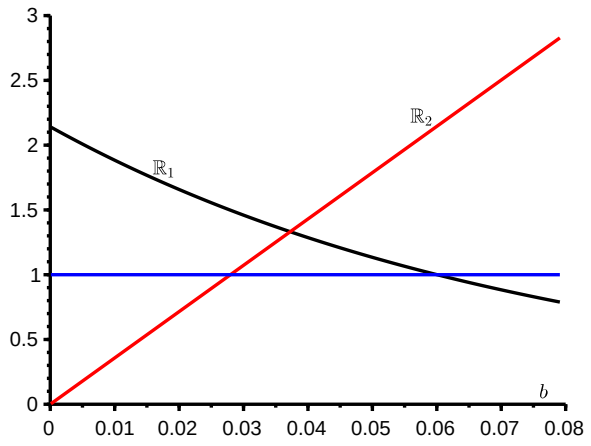

FIGURE 3 – $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ en fonction de $b = |\beta|_\infty$.

Références

[1] A. Belleni-Morante, *Applied Semigroups and Evolution Equations*, Clarendon Press, Londres (1979).

[2] S. Busenberg, M. Iannelli, H.R. Thieme, *Global behaviour of an age-structured SIS epidemic model.* SIAM J Math Anal 22 (1991) 1065-1080.

[3] P. Demeny, G. McNicoll, *Encyclopedia of population, vol 1-2.* Macmillann, New York, 2003.

[4] K. J. Engel et R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer (2000).

[5] M. Gyllenberg et G. F. Webb, *Asynchronous exponential growth of semigroups of nonlinear operators*, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), 443-467.

[6] K. P. Hadeler, R. Waldstätter et A. Wörz-Busekros, *Models for pair formation in bisexual populations*, J. Math. Biol. 26 (1988), 635-649.

[7] K. P. Hadeler, *Periodic solutions of homogeneous equations*, J. Diff. Equ. 95 (1992), 183-202.

[8] K. P. Hadeler, *Pair formation models with maturation period*, J. Math. Biol. 32 (1993), 1-15.

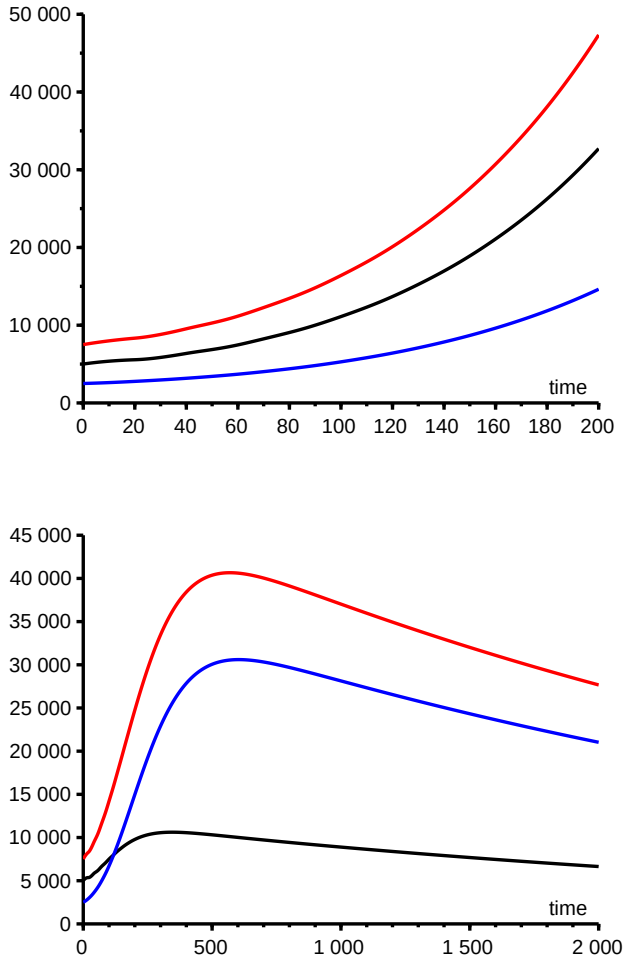

FIGURE 4 – La populations susceptible $N_1(t)$ (en noir), la population infectée $N_2(t)$ (en bleu) et la population totale $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ (en rouge) en fonction du temps t. La fraction infectée tend vers un nombre strictement compris entre 0 et 1. Figure du haut : $b = 0{,}03$, donc $\mathbb{R}_1 \simeq 1{,}46 > 1$, $\mathbb{R}_2 \simeq 1{,}08 > 1$ et la population totale croît exponentiellement. Figure du bas : $b = 0{,}04$ donc $\mathbb{R}_1 \simeq 1{,}29 > 1$, $\mathbb{R}_2 \simeq 1{,}43 > 1$ et la population totale décroît exponentiellement.

[9] K.P. Hadeler, *Topics in mathematical biology.* Springer, Berlin, 2017.

[10] M. Iannelli et M. Martcheva, *Homogeneous dynamical systems and the age–structured SIR model with proportionate mixing incidence*, in *Evolution Equations : Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics* (édité par M. Iannelli et G. Lumer), *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Vol. 55, Birkhäuser, Bâle (2003), 227-251.

[11] H. Inaba, *A semigroup approach to the strong ergodic theorem of the multistate stable population process*, Math. Popul. Studies 1(1) (1988), 49-77.

[12] H. Inaba, *Age-structured homogeneous epidemic systems with application to the MSEIR epidemic model*, J Math Biol 54 (2007) 101-146.

[13] H. Inaba, *On a new perspective of the basic reproduction number in heterogeneous environments*, J. Math. Biol. 65 (2012), 309-348.

[14] H. Inaba, *Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology*, Springer, Singapour (2017).

[15] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2e édition, Springer, Berlin (1984).

[16] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningue (1964).

[17] M. Livi-Bacci, *A concise history of world population*, 6th edn. Wiley, Hoboken, 2017.

[18] P. Manfredi et L. Fanti, *The demographic transition and neo-classical models of balanced growth*, in *The Theory of Economic Growth* (éd. N. Salvadori), Edward Elgar, Cheltenham (2003).

[19] L. Rosero-Bixby et J. B. Casterline, *Modelling diffusion effects in fertility transition*, Popul. Stud. 47 (1993), 147-167.

[20] S. Steinberg, *Meromorphic families of compact operators*, Arch. Rat. Mech. Anal. 31 (1968), 372-380.

[21] H. R. Thieme, *Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity*, SIAM J. Appl. Math. 70(1), 188-211 (2009).

[22] H.R. Thieme, *From homogeneous eigenvalue problems to two-sex population dynamics.* J Math Biol 75 (2017) 783-804.

[23] G. F. Webb, *A semigroup proof of the Sharpe-Lotka theorem*, in *Infinite-Dimensional Systems* (édité par F. Kappel et W. Schappacher), Lec. Notes Math. 1076, Springer, Berlin (1984), 254-268.

[24] G. F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Marcel Dekker : New York et Bâle (1985).

[25] G. F. Webb, *An operator theoretic formulation of asynchronous exponential growth*, Trans. Amer. Math. Soc. 303(2) (1987), 751-763.

[26] G. F. Webb, *Asynchronous exponential growth in differential equations with homogeneous nonlinearities*, in : *Differential Equations in Banach Spaces* (édité par G. Dore, A. Favini, E. Obrecht et A. Venni), *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* 148, Dekker, New York (1993), 225-233.

[27] G.F. Webb, *Asynchronous exponential growth in differential equations with asymptotically homogeneous nonlinearities.* Adv Math Sci Appl 3 (1994) 43-55.

[28] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6e édition, Springer, Berlin (1980).

[29] A. Ducrot, P. Magal, S. Ruan, Une introduction aux modèles de dynamique de populations structurées en âge et aux problèmes de bifurcations. Gazette des mathématiciens 125 (2010) 27-40.