

Convergence des méthodes numériques et dépendance par rapport à un paramètre des problèmes de valeur propre min-plus: modèles de Frenkel-Kontorova et homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi *

Nicolas Bacaër

Résumé

On utilise la version min-plus de la formule du rayon spectral pour démontrer : 1) que la valeur propre unique d'un problème de valeur propre min-plus dépend continûment des paramètres du noyau ; 2) que la méthode numérique introduite par Chou et Griffiths pour calculer cette valeur propre converge. Une boîte à outils récemment développée par l'INRIA permet d'illustrer ces résultats. On utilise les modèles de Frenkel-Kontorova en exemple. On insiste aussi sur l'analogie avec l'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi.

Mots-clés : problèmes de valeur propre min-plus ; analyse numérique ; modèle de Frenkel-Kontorova ; équations de Hamilton-Jacobi

1 Introduction

Certains problèmes d'optimisation peuvent se formuler en utilisant le semi-anneau $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, où

$$\lambda \oplus \mu = \min(\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad \lambda \otimes \mu = \lambda + \mu,$$

de sorte qu'ils apparaissent comme les analogues des problèmes classiques de valeur propre. Par exemple,

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{K_{i,j} + u_j\} = \lambda + u_i \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq j \leq n} K_{i,j} \times u_j = \lambda \times u_i$$

se ressemblent, ainsi que

$$\min_{a \leq y \leq b} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b K(x, y) \times u(y) dy = \lambda \times u(x).$$

*Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 35 (2001) 1185-1195.

Ces analogies ont été utilisées pour développer sur le semi-anneau \mathbb{R}_{\min} une théorie spectrale des matrices [5] et des opérateurs intégraux [14]. [6] a utilisé une méthode numérique pour résoudre des « problèmes intégraux » de valeur propre min-plus et ainsi tracer des diagrammes de phase pour des modèles de Frenkel-Kontorova. Le principal objectif ici est de démontrer la convergence de cette méthode.

La section 1, inspirée de [12], rappelle comment formaliser les analogies avec l'introduction de quelques définitions générales. La section 2 rappelle les théorèmes principaux de la théorie spectrale sur \mathbb{R}_{\min} . La section 3 démontre que la valeur propre λ dépend continûment des paramètres qui interviennent dans le noyau K . La section 4 démontre la convergence de l'approximation numérique des problèmes de valeur propre sur \mathbb{R}_{\min} . Les démonstrations des sections 3 et 4 se déduisent facilement d'une sorte de formule du rayon spectral présentée dans la section 2. La section 5 traite du cas des noyaux périodiques. La section 6 illustre les résultats précédents dans deux contextes : les modèles de Frenkel-Kontorova en physique du solide et l'homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi.

Mentionnons que les problèmes de valeur propre à paramètre pour les équations de Hamilton-Jacobi, qui sont équivalents à des problèmes de valeur propre min-plus, apparaissent aussi dans l'étude des ondes progressives pour la propulsion à propergol solide [3,15]. Cette application était la motivation initiale pour notre étude. Mais comme les détails techniques sont plus compliqués, on les expliquera ailleurs.

Notons aussi que l'analyse numérique d'autres problèmes linéaires min-plus n'est pas toujours aussi simple que celle des problèmes de valeur propre présentée ici (voir [4] pour une discussion).

2 Algèbre linéaire généralisée

Définition. Soit \mathcal{R} un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$. On dit que $(\mathcal{R}, +)$ est un **semi-groupe** si $+$ est associatif et a un élément neutre. On dit que $(\mathcal{R}, +)$ est un semi-groupe commutatif si $+$ est aussi commutatif.

Définition. Soit \mathcal{R} un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et \times . On dit que $(\mathcal{R}, +, \times)$ est un **semi-anneau** si $(\mathcal{R}, +)$ est un semi-groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0 , (\mathcal{R}, \times) est un semi-groupe dont l'élément neutre est noté 1 , \times est distributif par rapport à $+$, et $\forall \lambda \in \mathcal{R}$, $0 \times \lambda = \lambda \times 0 = 0$.

Exemples. $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ sont des semi-anneaux. Posons $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors $(\mathbb{R}_{\min}, \min, +)$ est un semi-anneau avec comme éléments neutres $+\infty$ et 0 .

Définition. Soit $(\mathcal{R}, +, \times)$ un semi-anneau et $(X, +)$ un semi-groupe commutatif. Supposons que pour tout $\lambda \in \mathcal{R}$ et $x \in X$, on définisse un élément de X

noté $\lambda \cdot x$. On dit que $(X, +, \cdot)$ est un **semi-module** sur $(\mathcal{R}, +, \times)$ si $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}$, $\forall x, y \in X$,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x, & (\lambda \times \mu) \cdot x &= \lambda \cdot (\mu \cdot x), \\ \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, & 1 \cdot x &= x.\end{aligned}$$

Si $Y \subset X$ et Y est un semi-module sur \mathcal{R} , alors on dit qu Y est un sous-semi-module de X .

Exemple. Soit X un ensemble et $(\mathcal{R}, +, \times)$ un semi-anneau. Pour tout $f, g \in \mathcal{R}^X$ et pour tout $x \in X$, posons

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x).$$

Alors \mathcal{R}^X est un semi-module sur \mathcal{R} .

Exemple. Soit X un ensemble et $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}_{\min} qui sont bornées inférieurement. Alors $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ est un sous-semi-module de $(\mathbb{R}_{\min}^X, \min, +)$.

Définition. Soit $(\mathcal{R}, +, \times)$ un semi-anneau, $(X, +, \cdot)$ et $(Y, +, \cdot)$ deux semi-modules sur \mathcal{R} et $L : X \rightarrow Y$. On dit que L est un **opérateur linéaire** si $\forall \lambda, \mu \in \mathcal{R}, \forall x, y \in X, L(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot L(x) + \mu \cdot L(y)$.

Exemple. Soit X un ensemble et $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\min}$ une application bornée inférieurement. Soit \mathcal{K} l'application de $B(X, \mathbb{R}_{\min})$ dans lui-même qui à u associe $\mathcal{K}u$ tel que

$$\forall x \in X, \quad (\mathcal{K}u)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\}.$$

Alors \mathcal{K} est un opérateur linéaire.

Définition. Soit $(\mathcal{R}, +, \times)$ un semi-anneau, $(X, +, \cdot)$ un semi-module sur \mathcal{R} , $L : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **valeur propre** de L s'il existe $x \in X$ tel que $x \neq 0$ et $L(x) = \lambda \cdot x$. Dans ce cas, on dit que x est un **vecteur propre** associé à λ .

Exemple. Mêmes notations que l'exemple précédent. Alors $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$ est une valeur propre de \mathcal{K} s'il existe $u \in B(X, \mathbb{R}_{\min})$ tel que u ne soit pas identiquement $+\infty$ et

$$\forall x \in X, \quad \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x). \quad (1)$$

3 Théorie spectrale sur \mathbb{R}_{\min}

Théorème 1 Soit X un ensemble et $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application bornée inférieurement. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornée inférieurement

qui vérifie (1). Alors

$$\lambda = \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \quad (2)$$

Cette formule est l'analogie pour \mathbb{R}_{\min} de la formule du rayon spectral. [6] la donne sans précision pour $X = [0, 1]$. [16] ne la donne que pour un ensemble X qui est fini ; dans ce cas, la formule (3) ci-dessous est plus intéressante. Pour une interprétation de la formule en terme de rayon spectral dans une semi-algèbre normée, voir [3].

Démonstration. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda + u(x_{n-1}) = \inf_{y \in X} \{K(x_{n-1}, y) + u(y)\} \leq K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Additionnons les n premières équations. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\lambda + u(x_0) \leq K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n) + u(x_n).$$

Puisque u est borné, divisons par n et passons à la limite $n \rightarrow +\infty$. On obtient

$$\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

La suite (x_n) était arbitraire, donc

$$\lambda \leq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Pour démontrer l'inégalité opposée, soit $\varepsilon > 0$ et $y_0 \in X$. On peut construire par récurrence une suite $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(y_{n-1}, y_n) + u(y_n) \leq \inf_{x \in X} \{K(y_{n-1}, x) + u(x)\} + \varepsilon = \lambda + u(y_{n-1}) + \varepsilon.$$

Additionnons les n premières équations et divisons par n . On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} + \frac{u(y_n)}{n} \leq \lambda + \frac{u(y_0)}{n} + \varepsilon.$$

Faisons tendre n vers $+\infty$. On obtient

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} - \varepsilon \\ &\geq \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Théorème 2 Soit (X, d) un espace métrique compact et $K \in C^0(X^2, \mathbb{R})$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ qui vérifie (1).

C'est un analogue pour \mathbb{R}_{\min} du théorème de Krein et Rutman. [5] donne une démonstration pour un ensemble X qui est fini. [7] donne une démonstration pour $X = [0, 1]$ et note que diverses généralisations sont possibles. [9] étend la démonstration à $X = [0, 1]^n$. [14] donne une démonstration dans le cadre général et même avec des hypothèses plus faibles. Mais la méthode de démonstration de [14] est un peu différente de celle utilisée dans [7,9] et moins claire. La démonstration ci-dessous est une généralisation directe de celle dans [7,9].

Démonstration. Soit $E = C^0(X, \mathbb{R})$. Pour tout $u \in E$, posons $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$. Alors E est un espace de Banach. Pour tout $u \in E$ et $x \in X$, posons

$$(Tu)(x) = \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z, y) + u(y)\}.$$

L'ensemble $T(E)$ est équicontinu. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Puisque K est uniformément continu, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y, x', y' \in X$,

$$\max\{d(x, x'); d(y, y')\} \leq \alpha \Rightarrow |K(x, y) - K(x', y')| \leq \varepsilon.$$

Soit $x, x' \in X$ tels que $d(x, x') \leq \alpha$. Alors pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} (Tu)(x) - (Tu)(x') &= \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} - \inf_{y \in X} \{K(x', y) + u(y)\} \\ &\leq \inf_{y \in X} \{K(x', y) + \varepsilon + u(y)\} - \inf_{y \in X} \{K(x', y) + u(y)\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Échangeons les rôles de x et x' . On obtient $|(Tu)(x) - (Tu)(x')| \leq \varepsilon$.

L'application $T : E \rightarrow E$ qui à u associe Tu est continue. En effet, soit $u, v \in E$. Pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} (Tv)(x) &= \inf_{y \in X} \{K(x, y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\quad - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z, y) + v(y) - u(y) + u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + \sup_{y \in X} \{v(y) - u(y)\} - \inf_{y \in X} \{v(y) - u(y)\} \\ &\leq (Tu)(x) + 2\|v - u\|. \end{aligned}$$

Échangeons les rôles de v et u . On obtient $\|Tv - Tu\| \leq 2\|v - u\|$.

Posons

$$K_- = \inf_{x, y \in X} K(x, y), \quad K_+ = \sup_{x, y \in X} K(x, y),$$

$$C = \{u \in E; \forall x \in X, 0 \leq u(x) \leq K_+ - K_-\}.$$

Pour tout $u \in E$ et $x \in X$,

$$0 \leq (Tu)(x) \leq \inf_{y \in X} \{K_+ + u(y)\} - \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K_- + u(y)\} = K_+ - K_-.$$

Donc $T(E) \subset C$. En particulier, $T(C) \subset C$ et $T(C)$ est borné. Puisque $T(E)$ est équicontinu, $T(C)$ l'est aussi. D'après le théorème d'Ascoli et Arzela, $T(C)$

est relativement compact dans E . Noter que C est un sous-ensemble fermé et convexe. Or d'après le théorème de Schauder, une application continue d'un sous-ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach à valeurs dans un sous-ensemble compact de C a un point fixe. Donc il existe $u \in C$ tel que $Tu = u$, ce qui signifie que (1) est vérifié avec

$$\lambda = \inf_{z \in X} \inf_{y \in X} \{K(z, y) + u(y)\}.$$

L'unicité de la valeur propre λ résulte du théorème 1.

4 Problèmes qui dépendent d'un paramètre

Les problèmes de valeur propre min-plus qui dépendent d'un paramètre ne semblent pas avoir été encore étudiés.

Proposition 1 *Soit (X, d) un espace métrique compact, Ω un espace topologique et $K : \alpha \mapsto K_\alpha$ une fonction continue de Ω dans $C^0(X^2, \mathbb{R})$ muni de la norme sup. Pour tout $\alpha \in \Omega$, soit λ_α l'unique nombre réel associé à K_α d'après le théorème 2. Alors la fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de Ω dans \mathbb{R} est continue.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage \mathcal{V} de α tel que

$$\beta \in \mathcal{V} \Rightarrow \sup_{x, y \in X} |K_\alpha(x, y) - K_\beta(x, y)| \leq \varepsilon.$$

Alors pour tout $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n} - \varepsilon &\leq \frac{K_\beta(x_0, x_1) + \cdots + K_\beta(x_{n-1}, x_n)}{n} \\ &\leq \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Prenons d'abord la lim inf quand $n \rightarrow +\infty$ de ces inégalités, puis l'infimum sur tous les $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on obtient, d'après la formule (2), que $\lambda_\alpha - \varepsilon \leq \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha + \varepsilon$.

Proposition 2 *Soit (X, d) un espace métrique compact et Ω un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel réel. Pour tout $\alpha \in \Omega$, soit $K_\alpha \in C^0(X^2, \mathbb{R})$. Supposons que pour tout $x, y \in X$, la fonction $\alpha \mapsto K_\alpha(x, y)$ de Ω dans \mathbb{R} soit concave. Pour tout $\alpha \in \Omega$, soit λ_α l'unique nombre réel associé à K_α par le théorème 2. Alors la fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de Ω dans \mathbb{R} est concave.*

[6] mentionne cette proposition pour $X = [0, 1]$ et $\Omega = \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $\mathbf{x} = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \Omega$, posons

$$S(\mathbf{x}, n, \alpha) = \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}.$$

Soit $t \in]0, 1[$ et $\alpha, \beta \in \Omega$. Alors pour tout $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \geq t S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) S(\mathbf{x}, n, \beta)$$

à cause de l'hypothèse de concavité. Avec les propriétés de la \liminf , on obtient pour tout $x \in X^{\mathbb{N}}$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \geq t \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta).$$

Prenons l'infimum sur tous les $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, t \cdot \alpha + (1 - t) \cdot \beta) \\ & \geq t \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, \alpha) + (1 - t) \inf_{\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} S(\mathbf{x}, n, \beta). \end{aligned}$$

Donc d'après la formule (2), $\lambda_{t \cdot \alpha + (1-t) \cdot \beta} \geq t \lambda_{\alpha} + (1 - t) \lambda_{\beta}$.

5 Méthodes numériques

La proposition suivante démontre la convergence de la méthode numérique utilisée par [6].

Proposition 3 *Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne : $\exists \kappa > 0, \forall x, x', y, y' \in X, |K(x, y) - K(x', y')| \leq \kappa \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$. D'après le théorème 2, soit λ l'unique nombre réel tel qu'il existe $u \in C^0(X, \mathbb{R})$ qui vérifie (1). Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de X tels que*

$$h_p = \sup_{x \in X} \min_{y \in X_p} d(x, y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après le théorème 2, pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit λ_p l'unique nombre réel tel qu'il existe $u_p : X_p \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in X_p, \quad \min_{y \in X_p} \{K(x, y) + u_p(y)\} = \lambda_p + u_p(x).$$

Alors $\lambda \leq \lambda_p \leq \lambda + \kappa h_p$ et $\lambda_p \rightarrow \lambda$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Cette proposition est liée au point de vue de l'analyse non-standard de [10], qui considère des valeurs de p infiniment grandes.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après (2),

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}, \\ \lambda_p &= \inf_{(x_n) \in X_p^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \end{aligned}$$

D'un côté, $X_p \subset X$, donc $\lambda \leq \lambda_p$. D'un autre côté, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} \leq \lambda + \varepsilon.$$

Par hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in X_p, d(x_n, y_n) \leq h_p$. Mais K est lipschitzienne, donc $\forall n \in \mathbb{N}, |K(x_n, x_{n+1}) - K(y_n, y_{n+1})| \leq \kappa h_p$. En conclusion,

$$\begin{aligned} \lambda_p &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(y_0, y_1) + \cdots + K(y_{n-1}, y_n)}{n} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n} + \kappa h_p \leq \lambda + \varepsilon + \kappa h_p. \end{aligned}$$

Comme ε était arbitraire, on obtient $\lambda_p \leq \lambda + \kappa h_p$.

Proposition 4 *Si X_p a q éléments, alors*

$$\lambda_p = \min_{1 \leq n \leq q} \min_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in X_p^n} \frac{K(x_0, x_1) + \cdots + K(x_{n-1}, x_n)}{n}. \quad (3)$$

Démonstration. Voir [5] par exemple.

Cette formule montre que λ_p est la « moyenne cyclique minimale » et qu'elle se calcule avec un nombre fini d'opérations. La démonstration est semblable à celle de (2). Néanmoins, ce n'est pas la formule (3) que l'on utilise en pratique. Il y a de meilleurs algorithmes, comme celui de Karp qui nécessite $O(q^3)$ opérations, ou celui de Howard qui semble être le plus rapide [8]. Noter que dans l'analyse numérique des problèmes de valeur propre min-plus, les matrices impliquées sont pleines et très grandes. Donc les algorithmes efficaces sont bienvenus, en particulier lorsqu'en plus le problème dépend d'un paramètre que l'on varie comme dans les prochaines sections. L'algorithme de Karp est très facile à programmer, tandis que celui de Howard est disponible à travers la boîte à outils Maxplus de Scilab (voir www-rocq.inria.fr/scilab/ et www-rocq.inria.fr/scilab/contributions.html).

6 Noyaux périodiques

Proposition 5 *Soit $(X, +)$ un groupe topologique abélien, $K : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée inférieurement et P un sous-groupe de X . Supposons que*

$$\forall p \in P, \forall (x, y) \in X^2, K(x + p, y + p) = K(x, y).$$

Soit $(\mathbf{X}, +)$ le groupe topologique qui est le quotient de X par P . Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, soit $x \in \mathbf{x}$ et posons

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y). \quad (4)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie pour tout $p \in P$ et $x \in X$, $u(x+p) = u(x)$ et

$$\inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} = \lambda + u(x), \quad (5)$$

alors la fonction quotient $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ déduite de u est continue et vérifie pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$,

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} = \lambda + \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

- Inversement, si $\mathbf{u} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue qui vérifie (6), alors la fonction P -périodique $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ déduite de \mathbf{u} est continue et vérifie (5).

[6] démontre cette proposition pour $X = \mathbb{R}$ et $P = \mathbb{Z}$, [9] pour $X = \mathbb{R}^n$ et $P = \mathbb{Z}^n$.

Démonstration. Notons d’abord que \mathbf{K} est bien défini puisque pour tout $x \in X$, $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ et $p \in P$,

$$\inf_{y \in \mathbf{y}} K(x+p, y) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y-p) = \inf_{y \in \mathbf{y}} K(x, y).$$

Le reste se déduit facilement du fait que si $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et $x \in \mathbf{x}$, alors

$$\begin{aligned} \inf_{y \in X} \{K(x, y) + u(y)\} &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x, y) + u(y)\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \inf_{y \in \mathbf{y}} \{K(x, y) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\} \\ &= \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{u}(\mathbf{y})\}. \end{aligned}$$

7 Exemples

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $K_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$K_0(x+1, y+1) = K_0(x, y) \quad (7)$$

$$K_\alpha(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x-y). \quad (8)$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, posons

$$\lambda_\alpha = \inf_{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{K_\alpha(x_0, x_1) + \cdots + K_\alpha(x_{n-1}, x_n)}{n}. \quad (9)$$

Puisque \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact, il résulte du théorème 2 et de la proposition 5 que λ_α est l’unique nombre réel tel qu’il existe $u_\alpha \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période 1 qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \inf_{y \in \mathbb{R}} \{K_\alpha(x, y) + u_\alpha(y)\} = \lambda_\alpha + u_\alpha(x). \quad (10)$$

D’après la proposition 2, la fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ est concave. Donc elle a une dérivée à droite $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ pour tout α , et la fonction $\alpha \mapsto \frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ est décroissante.

7.1 Modèles de Frenkel et Kontorova

Soit $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $L(x+1, y+1) = L(x, y)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, posons

$$K_\alpha(x, y) = L(x, y) - \alpha(x - y).$$

Alors K_α vérifie les hypothèses (7) et (8). Un cas particulier est celui où $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est périodique de période 1, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$L(x, y) = V(x) + \frac{(y - x)^2}{2}.$$

La figure 1 montre la dépendance de λ_α par rapport à α lorsque $V(x) = C[1 - \cos(2\pi x)]$, où C est un autre paramètre. Frenkel et Kontorova ont proposé cet exemple en 1938. On prend $C = (4/3)/(2\pi)^2$. On a pris l'ensemble $\{0, 1/p, 2/p, \dots, (p-1)/p\}$ pour discrétiser \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Noter que pour $\alpha \in [0, 1/2]$ et $x, y \in [0, 1]$,

$$\inf_{p \in \mathbb{Z}} K_\alpha(x, y + p) = V(x) + \inf_{p \in \{-1, 0, 1\}} \left\{ \frac{(y - x + p)^2}{2} - \alpha(x - y - p) \right\}.$$

La figure (a) illustre la continuité de $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. La figure (b) suggère que $\frac{d\lambda}{d\alpha}(\alpha^+)$ est aussi une fonction continue de α , mais comme un « escalier du diable ». Un doute subsiste pour savoir si ceci peut se déduire des résultats d'Aubry [1,2] et des remarques de Griffith [13].

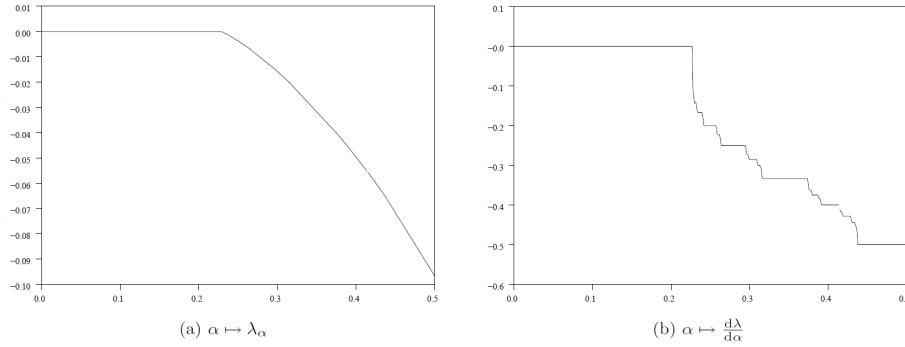


FIGURE 1 – L'énergie minimale du modèle de Frenkel et Kontorova.

7.2 Homogénéisation des équations de Hamilton-Jacobi

Soit $L \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Supposons que pour tout $x, v \in \mathbb{R}$, $L(x+1, v) = L(x, v)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, posons

$$K_0(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 L(\xi(s), \dot{\xi}(s)) ds ; \xi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), \xi(0) = y, \xi(1) = x \right\},$$

$$K_\alpha(x, y) = K_0(x, y) - \alpha(x - y) \quad (11)$$

Alors K_α vérifie les hypothèses (7) et (8). Un cas particulier de cette situation est celui où $V \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est périodique de période 1, et pour tout $x, v \in \mathbb{R}$,

$$L(x, v) = V(x) + \frac{v^2}{2}.$$

Dans cette situation, il y a une formule presque explicite pour la valeur propre λ_α (voir [9] par exemple), à savoir

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \min V & \text{si } |\alpha| \leq \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]} dx \\ \lambda \text{ tel que } |\alpha| = \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \lambda]} dx & \text{si } |\alpha| > \int_0^1 \sqrt{2[V(x) - \min V]} dx. \end{cases}$$

La figure 2 montre la dépendance de λ_α par rapport à α lorsque $V(x) = 1 - \cos(2\pi x)$. Notez les similitudes et les différences avec la figure 1. Il est étrange que deux modèles aussi proches aient des comportements si différents.

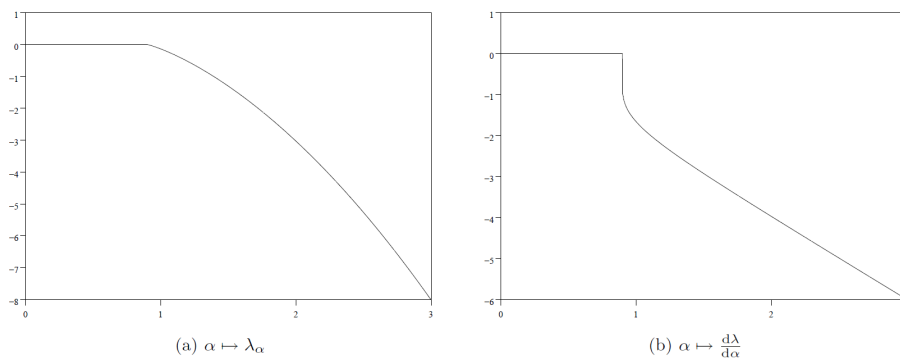


FIGURE 2 – Le hamiltonien effectif pour l'équation eikonale.

Lorsque $L(x, v)$ est convexe par rapport à v , [9] montre que le problème de valeur propre (10) avec le noyau K_α donné par (11) est équivalent au problème pour une cellule

$$H\left(x, \alpha + \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right) = \bar{H}(\alpha),$$

où $\bar{H}(\alpha) = -\lambda_\alpha$ et pour tout $x, p \in \mathbb{R}$,

$$H(x, p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \{p \cdot v - L(x, v)\}.$$

Rappelons que ce problème pour une cellule vient de l'homogénéisation quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)\right) = 0.$$

[11] expose d'autres liens entre la théorie d'Aubry et Mather et les équations de Hamilton et Jacobi. Notez aussi que la méthode numérique, qui est assez facile

pour le modèle de Frenkel et Kontorova, n'est pas facile à adapter au cas des équations de Hamilton et Jacobi car le noyau $K_\alpha(x, y)$ donné par (11) est déjà difficile à calculer. Dans certains cas, on pourrait utiliser un logiciel qui résout les problèmes aux limites liés à l'équation d'Euler et Lagrange pour (11). Ceci nécessite d'être étudié par ailleurs.

7.3 Sur la vitesse de convergence

Retournons aux modèles de Frenkel et Kontorova. Comme dans [6], soit $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique parabolique par morceaux définie par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{c}{2} x^2 & \text{si } -1/4 \leq x \leq 1/4, \\ \frac{c}{16} - \frac{c}{2} (x - \frac{1}{2})^2 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 3/4 \end{cases}$$

avec $c \geq 0$. On utilise l'ensemble $\{0, 1/p, 2/p, \dots, (p-1)/p\}$ pour la discrétisation. D'après la proposition 3 avec $h_p = 1/p$, on a l'inégalité

$$\log_{10}(\lambda_p - \lambda) \leq \log_{10}(\kappa) - \log_{10}(p),$$

où κ est la constante de lipschitz de la fonction \mathbf{K} définie par (4). Supposons que $c = 4/3$ et $\alpha = 13/32$. Alors λ se calcule explicitement, comme indiqué dans [6], à savoir $\lambda = -\frac{265}{2048}$. La figure 3 montre $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ en fonction de $-\log_{10}(p)$. À cause de propriétés spécifiques de K , la pente de la fonction $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ semble proche de 2, ce qui suggère que l'erreur est quadratique. Cependant, on peut construire des exemples de problèmes de valeur propre min-plus pour lesquels la vitesse de convergence n'est que linéaire. Il reste à trouver des hypothèses suffisantes sur le noyau pour que la convergence soit quadratique.

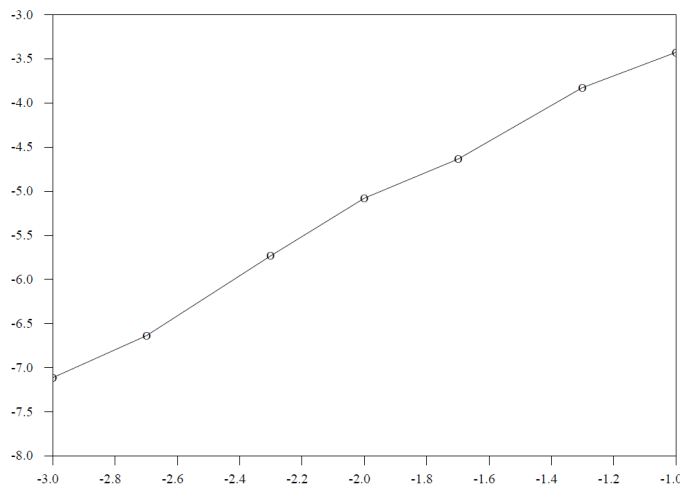


FIGURE 3 – Convergence. $\log_{10}(\lambda_p - \lambda)$ en fonction de $-\log_{10}(p)$.

Remerciements. L'auteur remercie l'Université de Colombie britannique pour son atelier stimulant sur les méthodes de viscosité pour les équations aux dérivées partielles, ainsi que Lin Yi-Jiun pour son aide.

Références

- [1] S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in *Solitons and Condensed Matter Physics*, A.R. Bishop et T. Schneider (éd.), Springer-Verlag, Berlin (1978) 264-277.
- [2] [2] S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase. *Physica D* 7 (1983) 240-258.
- [3] N. Bacaër, Min-plus spectral theory and travelling fronts in combustion. In : *System Structure and Control 2001*, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.731-736.
- [4] N. Bacaër, Can one use Scilab's max-plus toolbox to solve eikonal equations? In : *System Structure and Control 2001*, P. Horacek (éd.), Elsevier, 2001, p.737-742.
- [5] F. Baccelli, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, G. Cohen, *Synchronization and Linearity*. Wiley, Chichester (1992).
- [6] W. Chou, R.B. Griffiths, Ground states of one-dimensional systems using effective potentials. *Phys. Rev. B* 34 (1986) 6219-6234.
- [7] W. Chou, R.J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming. *Adv. in Appl. Math.* 8 (1987) 486-498.
- [8] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. Mc Gettrick, J.P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. <http://amadeus.inria.fr/gaubert/HOWARD.html>
- [9] M. Concordel, Periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations : additive eigenvalues and variational formula. *Indiana Univ. Math. J.* 45 (1996) 1095-1117.
- [10] P.I. Dudnikov, S.N. Samborskii, Endomorphisms of semimodules over semirings with idempotent operation. *Math. USSR-Izv.* 38 (1992) 91-105.
- [11] L.C. Evans and D. Gomes, Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics I. *Arch. Rational Mech. Anal.* 157 (2001) 1-33.
- [12] J.S. Golan, *The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science*. Longman Scientific & Technical, Harlow (1992).
- [13] R.B. Griffiths, Frenkel-Kontorova models of commensurate-incommensurate phase transitions, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics. VII*, H. van Beijeren, éd., North-Holland, Amsterdam (1990) 69-110.
- [14] V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, *Idempotent Analysis and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas (1997).

- [15] G. Namah, J.M. Roquejoffre, The “hump” effect in solid propellant combustion. *Interfaces Free Bound.* 2 (2000) 449-467.
- [16] S.J. Sheu, A.D. Wentzell, On the solutions of the equation arising from the singular limit of some eigen problems, in *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, W.M. McEneaney *et al.* (éd.), Birkhäuser, Boston (1999) 135-150.