# LES LAURÉATS DES PRIX DE L'UNION MATHÉMATIQUE INTERNATIONALE (1998-2022)

Textes disponibles sur le site de
l'Union mathématique internationale

traduits par Nicolas Bacaër

# Les lauréats des prix de l'Union mathématique internationale (1998-2022)

Textes sources : www.mathunion.org

Les textes ont été traduits automatiquement avec le logiciel DeepL puis relus et corrigés.

Pour la traduction :
Nicolas Bacaër
Institut de recherche pour le développement
nicolas.bacaer@ird.fr

Certains textes du congrès de 2010 ont déjà été traduits par Benoît Kloeckner et sont disponibles sur le site images.math.cnrs.fr.

Couverture : médaille Fields (Archimède et une citation en latin de Marcus Manilius « S'élever au-dessus de soi-même et conquérir le monde »)

Paris, 2024

# Introduction

> « Les classes dominantes sont souvent les premières à adopter le parler de l'envahisseur. Elles font de même aujourd'hui avec l'anglais. En adoptant la langue de l'ennemi, elles espèrent en tirer parti sur le plan matériel, ou s'assimiler à lui pour bénéficier symboliquement de son prestige. »
>
> Claude Hagège, dans *L'Express*, 2012

L'Union mathématique internationale remet tous les quatre ans des prix à l'occasion du congrès international des mathématiciens. Le prix le plus connu est la médaille Fields, attribuée pour la première fois en 1936 puis régulièrement à partir de 1950, réservée à des mathématiciens de moins de quarante ans. Mais il y a aussi le prix Gauss pour les mathématiques appliquées (depuis 2006), la médaille Chern (depuis 2010) et le prix Nevanlinna pour les aspects mathématiques de l'informatique (depuis 1982). Ce dernier prix a été transformé en « médaille de l'abaque » en 2022. Quant au prix Līlāvatī, il récompense depuis 2010 la vulgarisation des mathématiques.

Ces prix et médailles s'accompagnent de citations et de textes d'explication ou de vulgarisation, dont les auteurs ne sont pas toujours précisés. Certains de ces textes sont disponibles sur le site `mathunion.org`. Bien que le secrétariat de l'Union mathématique internationale soit basé à Berlin, tous les textes récents ne sont disponibles qu'en anglais.

Le congrès de 2022 semble marquer un tournant en matière d'ouverture. Les sept volumes des actes du congrès ont été publiés en décembre 2023 en accès libre sous une licence CC-BY-4.0, ce qui autorise notamment la traduction. De plus, certains fichiers sources en LaTeX sont disponibles sur le site arXiv.

Dans ce recueil, on a traduit semi-automatiquement en français des textes disponibles en ligne relatifs aux congrès de 1998 à 2022. Pour le congrès de 2010, on a repris et très légèrement modifié certaines traductions de Benoît Kloeckner qui figurent sur le site d'*Images des mathématiques*.

Des hyperliens renvoient vers des articles de Wikipédia à la première apparition de leur titre dans le recueil. La liste de ces hyperliens figure en

index. Les termes qui renvoient à une section d'un article de Wikipédia et non à un article complet apparaissent en italique dans l'index.

Les chapitres se terminent par une courte bibliographie pour signaler certains livres disponibles en français écrits par les lauréats et pour indiquer quelques textes de vulgarisation ou quelques vidéos complémentaires en accès libre.

Nicolas Bacaër
Paris, mars 2024

# Sommaire

**Liste des lauréats (1936-1994)** **1**

## Le congrès de 1998 3

**Médaille Fields : Richard E. Borcherds** **4**

**Médaille Fields : William Timothy Gowers** **6**

**Médaille Fields : Maxim Kontsevitch** **8**

**Médaille Fields : Curtis T. McMullen** **10**

**Prix Nevanlinna : Peter Shor** **12**

## Le congrès de 2002 14

**Médaille Fields : Laurent Lafforgue** **15**

**Médaille Fields : Vladimir Voïevodski** **18**

**Prix Nevanlinna : Madhu Sudan** **21**

## Le congrès de 2006 23

**Médaille Fields : Andreï Okounkov** **24**

**Médaille Fields : Grigori Perelman** **28**

**Médaille Fields : Terence Tao** **33**

**Médaille Fields : Wendelin Werner** **38**

**Prix Gauss : Kiyoshi Itō** **43**

**Prix Nevanlinna : Jon Kleinberg** **48**

**Le congrès de 2010** **53**

**Médaille Fields : Elon Lindenstrauss** **54**

**Médaille Fields : Ngô Bảo Châu** **58**

**Médaille Fields : Stanislav Smirnov** **62**

**Médaille Fields : Cédric Villani** **67**

**Prix Gauss : Yves Meyer** **72**

**Médaille Chern : Louis Nirenberg** **81**

**Prix Nevanlinna : Daniel Spielman** **87**

**Prix Līlāvatī : Simon Singh** **92**

**Le congrès de 2014** **95**

**Médaille Fields : Artur Avila** **96**

**Médaille Fields : Manjul Bhargava** **101**

**Médaille Fields : Martin Hairer** **107**

**Médaille Fields : Maryam Mirzakhani** **112**

**Prix Gauss : Stanley Osher** **117**

**Médaille Chern : Phillip Griffiths** **123**

**Prix Nevanlinna : Subhash Khot** **130**

**Prix Līlāvatī : Adrián Paenza** **136**

**Le congrès de 2018** **138**

**Médaille Fields : Caucher Birkar** **139**

**Médaille Fields : Alessio Figalli** **146**

**Médaille Fields : Peter Scholze** **152**

**Médaille Fields : Akshay Venkatesh** **158**

**Prix Gauss : David Donoho** **165**

**Médaille Chern : Masaki Kashiwara** **172**

**Prix Nevanlinna : Constantínos Daskalákis** **177**

**Prix Līlāvatī : Ali Nesin** **184**

**Le congrès de 2022** **186**

**Médaille Fields : Hugo Duminil-Copin** **187**

**Médaille Fields : June Huh** **195**

**Médaille Fields : James Maynard** **202**

**Médaille Fields : Maryna Viazovska** **208**

**Prix Gauss : Elliott Lieb** **217**

**Médaille Chern : Barry Mazur** **225**

**Médaille de l'abaque : Mark Braverman** **233**

**Prix Līlāvatī : Nikolaï Andreïev** **241**

**Index** **244**

# Liste des lauréats (1936-1994)

## Médaille Fields

| | |
|---|---|
| 1936 | Lars Valerian Ahlfors<br>Jesse Douglas |
| 1950 | Laurent Schwartz<br>Atle Selberg |
| 1954 | Kunihiko Kodaira<br>Jean-Pierre Serre |
| 1958 | Klaus Roth<br>René Thom |
| 1962 | Lars Hörmander<br>John Milnor |
| 1966 | Michael Atiyah<br>Paul Cohen<br>Alexandre Grothendieck<br>Stephen Smale |
| 1970 | Alan Baker<br>Heisuke Hironaka<br>Sergueï Novikov<br>John Griggs Thompson |
| 1974 | Enrico Bombieri<br>David Mumford |
| 1978 | Pierre Deligne<br>Charles Fefferman<br>Gregori Margulis<br>Daniel Quillen |
| 1982 | Alain Connes<br>William Thurston<br>Shing-Tung Yau |
| 1986 | Simon Donaldson<br>Gerd Faltings<br>Michael Freedman |
| 1990 | Vladimir Drinfeld<br>Vaughan Jones<br>Shigefumi Mori<br>Edward Witten |
| 1994 | Jean Bourgain<br>Pierre-Louis Lions<br>Jean-Christophe Yoccoz<br>Efim Zelmanov |

**Prix Nevanlinna**

| | |
|---|---|
| 1982 | Robert Tarjan |
| 1986 | Leslie Valiant |
| 1990 | Alexander Razborov |
| 1994 | Avi Wigderson |

# Le congrès de 1998

# Médaille Fields : Richard E. Borcherds

> « pour ses contributions à l'algèbre, à la théorie des formes automorphes et à la physique mathématique, et notamment pour l'introduction des algèbres vertex et des algèbres de Lie de Borcherds, pour la démonstration de la conjecture « clair de lune » de Conway et Norton, et pour la découverte d'une nouvelle classe de produits infinis automorphes ».

Richard E. Borcherds a été récompensé pour ses travaux dans les domaines de l'algèbre et de la géométrie, en particulier pour sa démonstration de la conjecture « clair de lune ». Cette conjecture a été formulée à la fin des années soixante-dix par les mathématiciens britanniques John Conway et Simon Norton et présente deux structures mathématiques dans une relation si inattendue que les experts lui ont donné le nom de « clair de lune ». En 1989, Borcherds a réussi à éclaircir le contexte mathématique de ce sujet et à apporter une démonstration de la conjecture.

La conjecture « clair de lune » établit une relation entre les « groupes monstres » et les fonctions elliptiques. Ces fonctions sont utilisées dans la construction de structures en forme de grilles en deux dimensions et peuvent être utiles par exemple en chimie pour la description des structures moléculaires. Les groupes monstres ne semblaient en revanche avoir d'importance que pour les mathématiques pures. Les groupes sont des objets mathématiques qui peuvent être utilisés pour décrire la symétrie des structures. D'un point de vue technique, il s'agit d'un ensemble d'objets pour lesquels certaines règles arithmétiques s'appliquent (par exemple, tous les nombres entiers et leurs sommes forment un groupe). Un théorème important d'algèbre dit que tous les groupes, aussi grands et compliqués qu'ils puissent paraître, sont tous constitués des mêmes composants, de la même manière que le monde matériel est constitué de particules atomiques. Le « groupe Monstre » est le plus grand groupe « sporadique, fini et simple » et l'un des objets les plus étranges de l'algèbre. Il comporte plus d'éléments qu'il n'y a de particules élémentaires dans l'Univers (environ $8 \times 10^{53}$), d'où son nom de « monstre ». Dans sa démonstration, Borcherds utilise de nombreuses idées de la théorie des cordes. C'est une manière étonnamment fructueuse de rendre la physique théorique utile aux mathématiques.

Bien qu'elles fassent encore l'objet de controverses parmi les physiciens, les cordes permettent d'expliquer bon nombre d'énigmes qui entourent les origines de l'Univers. Elles ont été proposées dans le cadre de la recherche d'une théorie unifiée et cohérente pour regrouper plusieurs théories partielles de la cosmologie. Les cordes ont une longueur mais aucune autre dimension et peuvent être des cordes ouvertes ou des boucles fermées.

Richard Ewen Borcherds (né le 29 novembre 1959) est professeur de recherche de la Société royale de Londres au département de mathématiques pures et de statistique de l'université de Cambridge depuis 1996. Borcherds a commencé sa carrière universitaire au collège de la Trinité à Cambridge, avant de devenir professeur assistant à l'université de Californie à Berkeley. Il a été nommé membre de la Société royale et occupe également un poste de professeur à Berkeley depuis 1993.

**Bibliographie**

— Ray (Urmie), « Le monstre au clair de lune : sur les travaux de R. Borcherds », *Gazette des mathématiciens*, 1998, n° 78, p. 93-98.

# Médaille Fields : William Timothy Gowers

> « pour ses contributions à l'analyse fonctionnelle et à la combinatoire, qui ont développé une nouvelle vision de la géométrie en dimension infinie, et notamment pour la solution de deux problèmes posés par Banach et pour la découverte de la « dichotomie de Gowers » : tout espace de Banach de dimension infinie contient un sous-espace avec de nombreuses symétries (en termes techniques, qui possède une base inconditionnelle) ou un sous-espace sur lequel tout opérateur de Fredholm est d'indice nul ».

William Timothy Gowers a apporté d'importantes contributions à l'analyse fonctionnelle en utilisant notamment des méthodes combinatoires. Ces deux domaines n'ont apparemment pas grand-chose à voir l'un avec l'autre. L'une des grandes réussites de Gowers a été de les combiner de manière fructueuse. L'analyse fonctionnelle et la combinatoire ont en commun le fait que nombre de leurs problèmes sont relativement faciles à formuler, mais extrêmement difficiles à résoudre. Gowers a pu utiliser des constructions mathématiques complexes pour démontrer certaines des conjectures du mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945), y compris le problème des « bases inconditionnelles ». Banach était un excentrique, préférant passer son temps au café plutôt que dans son bureau à l'université de Lwów (aujourd'hui Lviv). Dans les années vingt et trente, il a rempli un carnet de problèmes d'analyse fonctionnelle alors qu'il était assis au *Café Écossais*. Ce carnet est devenu connu par la suite sous le nom de *Livre écossais*. Gowers a surtout apporté une contribution importante à la théorie des espaces de Banach. Les espaces de Banach sont des ensembles dont les éléments ne sont pas des nombres, mais des objets mathématiques complexes tels que des fonctions ou des opérateurs. Dans un espace de Banach, il est cependant possible de manipuler ces objets comme des nombres. Il y a des applications par exemple en physique quantique. Une question clé pour les mathématiciens et les physiciens concerne la structure interne de ces espaces et la symétrie qu'ils présentent. Gowers a réussi à construire un espace de Banach qui n'a pratiquement aucune symétrie. Cette construction a depuis servi de contre-exemple approprié pour de nombreuses conjectures en analyse fonctionnelle, y compris le problème

de l'hyperplan et le problème de Schröder-Bernstein pour les espaces de Banach. La contribution de Gowers a également ouvert la voie à la résolution de l'un des problèmes les plus célèbres de l'analyse fonctionnelle, le « problème de l'espace homogène ». Il y a un an, Gowers a attiré l'attention dans le domaine de la combinatoire lorsqu'il a fourni une nouvelle démonstration d'un théorème du mathématicien Endre Szemerédi, plus courte et plus élégante que la méthode originale. Une telle prouesse exige une compréhension mathématique extrêmement profonde.

William Timothy Gowers (né le 20 novembre 1963) est professeur au département de mathématiques pures et de statistique de l'université de Cambridge et membre du collège de la Trinité. À partir d'octobre 1998, il sera professeur de mathématiques sur la chaire Rouse. Après avoir étudié jusqu'au niveau du doctorat à Cambridge, Gowers est entré à l'*University College* de Londres en 1991, où il est resté jusqu'à la fin de 1995. En 1996, il a reçu le prix de la Société mathématique européenne.

**Bibliographie**


— Bair (Jacques), « Un mathématicien contemporain emblématique : Sir William Timothy Gowers », 2018.
— Godefroy (Gilles), « Un résumé des travaux de T. Gowers », *Gazette des mathématiciens*, 1999, n° 79, p. 45-47.
— Gowers (Timothy), *Petite initiation aux mathématiques* (trad. J.-L. Basdevant), Paris, Vuibert, 2011.
— Gowers (Timothy), *Combinatoire*, Paris, Collège de France, 2021.
— Gowers (Timothy), « Cours au Collège de France », depuis 2021.

# Médaille Fields : Maxim Kontsevitch

> « pour ses contributions à la géométrie algébrique, à la topologie et à la physique mathématique, et notamment pour la démonstration de la conjecture de Witten sur les nombres d'intersection dans les espaces de modules de courbes stables, pour la construction de l'invariant de Vassiliev universel pour les nœuds, et pour la quantification formelle des variétés de Poisson ».

Maxim Kontsevitch s'est forgé une réputation en mathématiques pures et en physique théorique, avec des idées influentes et des réflexions profondes. Il a été influencé par les travaux de Richard Feynman et d'Edward Witten. Kontsevitch est un expert de la théorie des cordes et de la théorie quantique des champs. Il s'est fait connaître par ses contributions à quatre problèmes de géométrie. Il a pu démontrer une conjecture de Witten et l'équivalence mathématique de deux modèles de gravité quantique. La théorie de la gravité quantique est une étape intermédiaire vers une théorie unifiée complète. Elle harmonise les théories physiques du macrocosme (attraction des masses) et du microcosme (forces entre particules élémentaires). Un autre résultat de Kontsevitch concerne la théorie des nœuds. Les nœuds signifient exactement la même chose pour les mathématiciens et pour tout le monde, à ceci près que les deux extrémités de la corde sont toujours reliées l'une à l'autre. L'une des questions clés de la théorie des nœuds est la suivante : quels nœuds sont équivalents ? En d'autres termes, quels nœuds obtient-on en tordant et en tournant un nœud sans avoir recours à des ciseaux ? Cette question a été soulevée au début du XX^e^ siècle, mais elle est toujours sans réponse. On ne sait même pas quels nœuds peuvent être défaits, c'est-à-dire transformés en une simple boucle. Les mathématiciens cherchent à classer tous les nœuds. Un numéro ou une fonction leur serait attribué, les nœuds équivalents portant le même numéro. Les nœuds qui ne sont pas équivalents doivent avoir des numéros différents. Cependant, on n'est pas encore parvenu à une telle caractérisation des nœuds. Kontsevitch a trouvé le meilleur « invariant de nœuds » à ce jour. Bien que la théorie des nœuds fasse partie des mathématiques pures, elle semble avoir des applications scientifiques. Les structures de nœuds apparaissent en cosmologie, en mécanique

statistique et en génétique.

Maxim Kontsevitch (né le 25 août 1964) est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) en France et professeur invité à l'université Rutgers à New Brunswick aux États-Unis. Après des études à l'université de Moscou et un début de recherche à l'Institut pour les problèmes de traitement de l'information, il a obtenu un doctorat à l'université de Bonn en Allemagne en 1992. Il a ensuite été invité à Harvard, Princeton, Berkeley et Bonn.

**Bibliographie**


— Dars (Jean-François), Lesne (Annick) et Papillault (Anne), *Les déchiffreurs*, Paris, Belin, 2008.
— Ghys (Étienne), « Quand quatre courbes se rencontrent : une observation de Maxim Kontsevich », *Images des mathématiques*, 2009.
— Oesterlé (Joseph), « Quantification formelle des variétés de Poisson [d'après Maxim Kontsevich] », Séminaire Bourbaki, 1998, exposé n° 843.
— Pajot (Philippe), *Parcours de mathématiciens*, Paris, Le Cavalier bleu, 2011.

# Médaille Fields : Curtis T. McMullen

> « pour ses contributions à la théorie de la dynamique holomorphe et à la géométrisation des variétés de dimension 3, et notamment pour ses démonstrations de la conjecture de Bers sur la densité des *cusps* dans le bord de l'espace de Teichmüller et de la conjecture de Kra sur l'opérateur thêta ».

Curtis T. McMullen est récompensé principalement pour ses travaux dans les domaines de la géométrie et de la « dynamique holomorphe », une branche de la théorie des systèmes dynamiques mieux connue peut-être sous le nom de théorie du chaos. McMullen a apporté des contributions dans de nombreux domaines des mathématiques et dans des domaines marginaux. Sa thèse de doctorat contenait déjà un résultat important. La question était de savoir comment calculer toutes les solutions d'une équation arbitraire. Pour les équations simples, il est possible d'obtenir les solutions par un simple réarrangement. Pour la plupart des équations cependant, il est nécessaire d'utiliser une approximation. Une méthode bien connue est la méthode de Newton, déjà connue sous une forme rudimentaire dans l'Antiquité. Pour les polynômes du second degré, elle fournit sans exception de très bons résultats. La question essentielle était donc de savoir s'il existait une méthode comparable, qui n'avait pas encore été découverte, pour les équations de degré supérieur. McCullen est parvenu à la conclusion qu'un tel algorithme universel n'existe pas pour les équations de degré supérieur à trois ; seule une méthode partiellement applicable est possible. Pour les équations de degré trois, il a développé une « nouvelle » méthode newtonienne et a ainsi pu résoudre complètement la question des solutions approchées. Un autre résultat de McMullen concerne l'ensemble de Mandelbrot. Cet ensemble décrit des systèmes dynamiques qui peuvent être utilisés pour modéliser des phénomènes naturels complexes tels que la météorologie ou l'écoulement des fluides. La question est de savoir à partir de quels points un système diverge et quels sont les points qui se rapprochent de centres d'équilibre. La frontière entre ces deux extrêmes est l'ensemble de Julia, du nom du mathématicien français Gaston Julia qui a jeté les bases de la théorie des systèmes dynamiques au début du XX^e^ siècle. L'ensemble

de Mandelbrot montre les paramètres pour lesquels l'ensemble de Julia est connexe, c'est-à-dire attractif d'un point de vue mathématique. Cette description est très sommaire, mais il n'existait pas de meilleure caractérisation de la frontière. McMullen a toutefois réalisé une avancée majeure en montrant qu'il est possible de décider, en partie sur la base de l'ensemble de Mandelbrot, quel système dynamique associé est « hyperbolique » et peut donc être décrit plus en détail. Ces systèmes font l'objet d'une théorie bien développée. Les résultats de McMullen étaient déjà soupçonnés dans les années soixante, mais personne n'avait encore pu démontrer cette caractérisation exacte de l'ensemble de Julia.

Curtis T. McMullen (né le 21 mai 1958) est professeur invité à l'université Harvard. Il a étudié à Williamstown, à l'université de Cambridge et à Paris avant d'obtenir un doctorat en 1985 à Harvard. Il a donné des cours dans diverses universités avant de devenir professeur à l'université de Californie à Berkeley. Depuis 1998, il enseigne à Harvard. La médaille Fields est sa dixième récompense majeure. En 1998, il a été élu à l'Académie américaine des arts et des sciences.

**Bibliographie**

— Douady (Adrien) et Otal (Jean-Pierre), « Les travaux de Curtis McMullen », *Gazette des mathématiciens*, 1999, n° 80, p. 19-30.

# Prix Nevanlinna : Peter Shor

> « pour ses contributions à l'informatique quantique et à la géométrie algorithmique ».

Peter Shor a réalisé des travaux pionniers dans le domaine de la combinatoire et de la théorie de l'informatique quantique. Il a été reconnu mondialement en 1994 lorsqu'il a présenté une méthode de calcul pour « factoriser les grands nombres » qui pourrait en théorie être utilisée pour casser de nombreux systèmes de chiffrement actuellement employés. L'inconvénient est que l'algorithme de Shor fonctionne sur ce qu'on appelle des ordinateurs quantiques, dont il n'existe actuellement que des prototypes. Les ordinateurs quantiques ne fonctionnent pas comme les ordinateurs classiques, mais utilisent les états quantiques des atomes, ce qui offre une capacité de calcul bien supérieure à celle des superordinateurs parallèles actuels. Le résultat de Shor a déclenché une flambée de recherches parmi les physiciens et les informaticiens. Les experts prévoient que les ordinateurs quantiques pourraient déjà devenir une réalité au cours de la prochaine décennie, mais ce développement rapide est également une source d'inquiétude pour certains observateurs. Shor a pu démontrer mathématiquement que les nouveaux ordinateurs rendraient inopérantes les méthodes de chiffrement standard actuelles, telles que le chiffrement RSA, utilisées pour l'argent électronique et les signatures en ligne. Le chiffrement RSA a été mis au point en 1977 par les mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adelmann (d'où le sigle). Il utilise le fait que la factorisation d'un nombre est ce qu'on appelle une fonction à sens unique. Cela signifie que s'il est très facile de créer un grand nombre à partir de plus petits, il est beaucoup plus long de trouver tous les facteurs d'un grand nombre. Ce facteur temps est à la base de la sécurité offerte par de nombreuses méthodes de chiffrement. En utilisant les algorithmes de Shor, la factorisation de grands nombres sur un ordinateur quantique serait aussi rapide que la multiplication. Le chiffrement RSA et les autres méthodes ne seraient plus sûres. Les experts se veulent rassurants, car il reste encore beaucoup de travail avant de pouvoir construire de tels ordinateurs, mais les cryptographes travaillent déjà sur la prochaine génération de techniques de chiffrement.

Peter Shor (né le 14 août 1959) est mathématicien aux laboratoires AT&T de Florham Park, dans le New Jersey aux États-Unis. Ses recherches portent sur l'informatique quantique, la géométrie algorithmique et la combinatoire. Après avoir étudié à l'institut de technologie de Californie, il a obtenu un doctorat à l'institut de technologie du Massachusetts. Avant de rejoindre AT&T en 1986, il a été postdoctorant au centre de recherche mathématique à Berkeley en Californie.

**Bibliographie**

— Leprévost (Franck), « Peter Shor, Prix Nevanlinna 1998 », *Gazette des mathématiciens*, 1999, n° 81, p. 40-48.

# Le congrès de 2002

# Médaille Fields : Laurent Lafforgue

> « pour avoir réalisé une avancée majeure dans le programme de Langlands, établissant ainsi de nouveaux liens entre la théorie des nombres et l'analyse ».

Laurent Lafforgue a fait une énorme avancée dans le programme de Langlands en démontrant la correspondance de Langlands globale pour les corps de fonctions. Ses travaux se caractérisent par une formidable puissance technique, une profonde perspicacité et une approche systématique tenace.

Le programme de Langlands, formulé pour la première fois par Robert P. Langlands dans une lettre célèbre adressée à André Weil en 1967, est un ensemble de conjectures de grande portée qui font des prédictions précises sur la manière dont certains domaines disparates des mathématiques pourraient être reliés. L'influence du programme de Langlands s'est accrue au fil des ans, chaque nouvelle avancée étant saluée comme une découverte importante.

L'une des confirmations les plus spectaculaires du programme de Langlands s'est produite dans les années quatre-vingt-dix, lorsque la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles, associée aux travaux d'autres chercheurs, a conduit à la résolution de la conjecture de Taniyama-Shimura-Weil. Cette conjecture affirme que les courbes elliptiques, qui sont des objets géométriques dotés de propriétés arithmétiques profondes, ont une relation étroite avec les formes modulaires, qui sont des fonctions hautement périodiques apparues à l'origine dans un contexte complètement différent de l'analyse mathématique. Le programme de Langlands propose un réseau de relations de ce type qui relient les représentations galoisiennes issues de la théorie des nombres et les formes automorphes issues de l'analyse.

Les racines du programme de Langlands se trouvent dans l'un des résultats les plus profonds de la théorie des nombres, la loi de réciprocité quadratique, qui remonte à l'époque de Fermat au XVII^e^ siècle et qui a été démontrée pour la première fois par Carl Friedrich Gauss en 1801. Une question importante qui se pose souvent en théorie des nombres est de savoir si, lors de la division euclidienne d'un nombre premier par un autre nombre premier, le reste est un carré parfait. La loi de la réciprocité quadratique révèle un lien remarquable entre

deux questions apparemment sans rapport qui impliquent des nombres premiers $p$ et $q$ : « Le reste de $p$ divisé par $q$ est-il un carré parfait ? » et « Le reste de $q$ divisé par $p$ est-il un carré parfait ? » Malgré de nombreuses démonstrations de cette loi (Gauss lui-même a fourni six démonstrations différentes), elle reste l'un des faits les plus mystérieux de la théorie des nombres. D'autres lois de réciprocité qui s'appliquent à des situations plus générales ont été découvertes par Teiji Takagi et par Emil Artin dans les années 1920. L'une des motivations initiales du programme de Langlands était de fournir une compréhension complète des lois de réciprocité qui s'appliquent à des situations encore plus générales.

La correspondance de Langlands globale démontrée par Lafforgue permet cette compréhension complète dans le cadre non pas des nombres ordinaires mais d'objets plus abstraits appelés corps de fonctions. On peut considérer qu'un corps de fonctions est constitué de quotients de polynômes ; ces quotients peuvent être ajoutés, soustraits, multipliés et divisés tout comme les nombres rationnels. Lafforgue a établi, pour un corps de fonctions donné, un lien précis entre les représentations de ses groupes de Galois et les formes automorphes associées au corps. Il s'est appuyé sur les travaux de Vladimir Drinfeld, lauréat de la médaille Fields en 1990, qui a démontré un cas particulier de la correspondance de Langlands dans les années soixante-dix. Lafforgue a été le premier à voir comment les travaux de Drinfeld pouvaient être étendus pour fournir une image complète de la correspondance de Langlands dans le cas des corps de fonctions.

Au cours de ce travail, Lafforgue a inventé une nouvelle construction géométrique qui pourrait s'avérer importante à l'avenir. L'influence de ces développements se fait sentir dans toutes les mathématiques.

Laurent Lafforgue est né le 6 novembre 1966 à Antony, en France. Il a fait ses études à l'École normale supérieure à Paris à partir de 1986. Il est devenu chargé de recherche du Centre national de la recherche scientifique en 1990 et a travaillé dans l'équipe d'arithmétique et de géométrie algébrique de l'université Paris-Sud, où il a obtenu son doctorat en 1994. En 2002, il a été nommé professeur permanent de mathématiques à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette en France.

**Bibliographie**


— Lafforgue (Laurent), *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, Paris, Société mathématique de France, 1997.
— Lafforgue (Laurent), *Chirurgie des grassmanniennes*, Providence, American Mathematical Society, 2003.
— Lafforgue (Laurent), « Formules de traces et programme de Langlands », dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 3, Paris, Cassini, 2007, p. 391-416.
— Lafforgue (Laurent), « Fonctorialité et formules de Poisson non-linéaires », Cours de l'IHÉS, 2014.
— Lafforgue (Laurent), « Catégories syntactiques pour les motifs de Nori », Cours de l'IHÉS, 2015.
— Lafforgue (Laurent), *Géométrie plane et algèbre*, Paris, Hermann, 2018.
— Laumon (Gérard), « La correspondance de Langlands sur les corps de fonctions [d'après Laurent Lafforgue] », Séminaire Bourbaki, 2000, exposé n° 873.

# Médaille Fields : Vladimir Voïevodski

> « pour avoir développé de nouvelles théories de cohomologie pour les variétés algébriques, apportant ainsi de nouvelles perspectives à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique ».

Vladimir Voïevodski a accompli l'une des avancées les plus remarquables en géométrie algébrique au cours des dernières décennies en développant de nouvelles théories de cohomologie pour les variétés algébriques. Son travail se caractérise par une capacité à traiter des idées hautement abstraites avec facilité et flexibilité et à déployer ces idées pour résoudre des problèmes mathématiques très concrets.

La réussite de Voïevodski trouve son origine dans les travaux d'Alexandre Grothendieck, lauréat de la médaille Fields en 1966, un mathématicien profond et original qui a su percevoir des structures abstraites qui unissent les mathématiques. Grothendieck s'est rendu compte qu'il devait y avoir des objets, qu'il a appelés « motifs », qui sont à la base de l'unité entre deux branches des mathématiques, la théorie des nombres et la géométrie. Les idées de Grothendieck ont eu une grande influence sur les mathématiques et ont inspiré les travaux de Voïevodski.

La notion de cohomologie est apparue pour la première fois en topologie, que l'on peut décrire librement comme la « science des formes ». Comme exemples de formes étudiées, il y a la sphère, la surface d'un beignet à un trou et leurs analogues de dimensions supérieures. La topologie étudie les propriétés fondamentales qui ne changent pas lorsque ces objets sont déformés mais pas déchirés. À un niveau très élémentaire, la théorie de la cohomologie permet de découper un objet topologique en morceaux plus faciles à comprendre. Les groupes de cohomologie codent la manière dont les morceaux s'assemblent pour former l'objet. Il existe plusieurs façons de préciser cela, l'une d'entre elles étant la cohomologie singulière. Les théories de cohomologie généralisée extraient des données sur les propriétés des objets topologiques et encodent ces informations dans le langage des groupes. L'une des théories de cohomologie généralisée les plus importantes, la K-théorie topologique, a été développée principalement par un autre lauréat de la médaille Fields en 1966, Michael Atiyah.

Un résultat remarquable a révélé un lien étroit entre la cohomologie singulière et la K-théorie topologique.

En géométrie algébrique, les principaux objets d'étude sont les variétés algébriques, qui peuvent être représentées par des objets géométriques tels que des courbes ou des surfaces, mais elles sont beaucoup plus « rigides » que les objets malléables de la topologie, de sorte que les théories de cohomologie développées dans le cadre topologique ne s'appliquent pas ici. Pendant une quarantaine d'années, les mathématiciens ont travaillé dur pour développer de bonnes théories de cohomologie pour les variétés algébriques ; la mieux comprise d'entre elles était la version algébrique de la K-théorie. Une avancée majeure a eu lieu lorsque Voïevodski, s'appuyant sur une idée peu comprise proposée par Andreï Sousline, a créé une théorie de la « cohomologie motivique ». Par analogie avec le cadre topologique, il existe un lien étroit entre la cohomologie motivique et la K-théorie algébrique. En outre, Voïevodski a fourni un cadre pour décrire de nombreuses nouvelles théories de cohomologie pour les variétés algébriques.

Son travail constitue une étape majeure dans la réalisation de la vision de Grothendieck sur l'unité des mathématiques.

L'une des conséquences des travaux de Voïevodski et l'une de ses réalisations les plus célèbres est la solution de la conjecture de Milnor, qui a été pendant trois décennies le principal problème en suspens de la K-théorie algébrique. Ce résultat a des conséquences importantes dans plusieurs domaines, notamment pour la cohomologie galoisienne, les formes quadratiques et la cohomologie des variétés algébriques complexes. Le travail de Voïevodski pourrait avoir un impact important sur les mathématiques à l'avenir en permettant d'utiliser des mécanismes puissants développés en topologie pour étudier les variétés algébriques.

Vladmir Voïevodski est né le 4 juin 1966 en Russie. Il a obtenu sa licence en mathématiques à l'université d'État de Moscou en 1989 et son doctorat en mathématiques à l'université Harvard en 1992. Il a occupé des postes de professeur invité à l'Institut d'étude avancé, à l'université Harvard et à l'institut Max-Planck pour les mathématiques avant de rejoindre le corps enseignant de l'université Northwestern en 1996. En 2002, il a été nommé professeur permanent à l'Institut d'étude avancé à Princeton dans le New Jersey. [1]

1. NDT. Voïevodski est décédé en 2017.

**Bibliographie**

— Kahn (Bruno), « La conjecture de Milnor [d'après V. Voevodsky] », *Séminaire Bourbaki*, 1997, exposé n° 834.
— Kahn (Bruno), « Formes quadratiques et cycles algébriques [d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...] », *Séminaire Bourbaki*, 2004, exposé n° 941.

# Prix Nevanlinna : Madhu Sudan

> pour ses contributions aux preuves vérifiables de manière probabiliste, aux problèmes d'optimisation non approximables et aux codes correcteurs d'erreur.

Madhu Sudan a apporté d'importantes contributions à plusieurs domaines de l'informatique théorique. Ses travaux se caractérisent par une vision remarquable et un large éventail d'intérêts.

Sudan a été l'un des principaux contributeurs au développement de la théorie des preuves vérifiables de manière probabiliste. Étant donné une preuve d'un énoncé mathématique, la théorie fournit un moyen de présenter la preuve sous une forme où sa logique fondamentale est codée sous la forme d'une suite de *bits* qui peuvent être stockés dans un ordinateur. Un « vérificateur » peut, en ne vérifiant que certains de ces *bits*, déterminer avec une grande probabilité si la preuve est correcte. Ce qui est extrêmement surprenant et tout à fait contre-intuitif, c'est que le nombre de *bits* que le vérificateur doit examiner peut être extrêmement réduit. La théorie a été développée dans des articles de Sudan, S. Arora, U. Feige, S. Goldwasser, C. Lund, L. Lovász, R. Motwani, S. Safra et M. Szegedy. Pour ce travail, ces auteurs ont reçu conjointement en 2001 le prix Gödel de l'*Association for Computing Machinery*.

En collaboration avec d'autres chercheurs, Sudan a également apporté des contributions fondamentales à la compréhension de la non-approximabilité des solutions à certains problèmes. Ces travaux sont liés à la question fondamentale non résolue de l'informatique théorique : P est-il égal à NP ? En gros, P est constitué de problèmes « faciles » à résoudre avec les méthodes informatiques actuelles, tandis que NP est censé contenir des problèmes fondamentalement plus difficiles. Le terme « facile » a une signification technique liée à l'efficacité des algorithmes informatiques pour résoudre les problèmes. Un problème fondamentalement difficile dans NP a la propriété qu'une solution donnée est facilement vérifiée mais qu'aucun algorithme n'est connu pour produire facilement une solution à partir de zéro. Certains problèmes NP-difficiles nécessitent de trouver une solution optimale à un problème combinatoire tel que le suivant : étant donné une collection finie d'ensembles finis, quelle est la plus grande taille d'une sous-collection telle que deux ensembles quelconques de la sous-collection

soient disjoints ? Sudan et d'autres ont montré que, pour de nombreux problèmes de ce type, l'approximation d'une solution optimale est tout aussi difficile que la recherche d'une solution optimale. Ce résultat est étroitement lié aux travaux sur les preuves vérifiables de manière probabiliste. Comme les problèmes en question sont étroitement liés à de nombreux problèmes quotidiens en science et en technologie, ce résultat est d'une immense importance pratique et théorique.

Le troisième domaine dans lequel Sudan a apporté d'importantes contributions est celui des codes correcteurs d'erreurs. Ces codes jouent un rôle énorme en garantissant la fiabilité et la qualité de tous les types de transmission d'informations, de la musique enregistrée sur CD à la communication sur Internet en passant par les transmissions par satellite. Dans tout canal de communication, il y a une certaine quantité de bruit qui peut introduire des erreurs dans les messages envoyés. On utilise la redondance pour éliminer les erreurs dues au bruit en codant le message dans un message plus volumineux. Pour autant que le message codé ne subisse pas trop d'erreurs lors de la transmission, le destinataire peut récupérer le message original. La redondance augmente le coût de la transmission des messages. L'art et la science des codes correcteurs d'erreurs consistent à équilibrer la redondance avec l'efficacité. Une classe de codes largement utilisée est celle des codes de Reed-Solomon (et leurs variantes), qui ont été inventés dans les années soixante. Pendant quarante ans, on a cru que les codes ne pouvaient corriger qu'un certain nombre d'erreurs. En créant un nouvel algorithme de décodage, Sudan a démontré que les codes de Reed-Solomon pouvaient corriger beaucoup plus d'erreurs qu'on ne le pensait auparavant.

Madhu Sudan est né le 12 septembre 1966 à Madras (aujourd'hui Chennai) en Inde. Il a obtenu sa licence d'informatique à l'institut indien de technologie de Delhi (1987) et son doctorat en informatique à l'université de Californie à Berkeley (1992). Il a été chercheur au centre de recherche Thomas J. Watson d'IBM à Yorktown Heights, dans l'État de New York (1992-1997). Il est actuellement professeur associé au département de génie électrique et d'informatique de l'institut de technologie du Massachusetts.

**Bibliographie**

— Augot (Daniel), « Les travaux de M. Sudan sur les codes correcteurs d'erreurs », *Gazette des mathématiciens*, 2003, n° 98, p. 5-13.

# Le congrès de 2006

# Médaille Fields : Andreï Okounkov

> « pour ses contributions à la théorie des probabilités, à la théorie des représentations et à la géométrie algébrique ».

**Communiqué de presse**

Les travaux d'Andreï Okounkov ont révélé de nouvelles connexions profondes entre différents domaines des mathématiques et ont apporté de nouveaux éclairages sur des problèmes de physique. Bien que ses travaux soient difficiles à classer parce qu'ils touchent à une grande variété de domaines, deux thèmes clairs sont l'utilisation de notions d'aléatoire et d'idées classiques de la théorie des représentations. Cette combinaison s'est avérée efficace pour résoudre des problèmes de géométrie algébrique et de mécanique statistique.

Andreï Okounkov est né en 1969 à Moscou. Il a obtenu son doctorat en mathématiques à l'université d'État de Moscou en 1995. Il est professeur de mathématiques à l'université de Princeton. Il a également occupé des postes à l'Académie des sciences de Russie, à l'Institut d'étude avancée de Princeton, à l'université de Chicago et à l'université de Californie à Berkeley. Parmi les distinctions qu'il a reçues figurent une bourse Sloan de recherche (2000), une bourse Packard (2001) et le prix de la Société mathématique européenne (2004).

L'un des objets d'étude fondamentaux de la théorie des représentations est le « groupe symétrique », dont les éléments sont des permutations d'objets. Par exemple, si les objets sont les lettres $\{C, G, J, M, N, O, Q, Z\}$, une permutation est un classement des lettres, tel que GOQZMNJC ou JZOQCGNM. Le nombre de permutations possibles augmente rapidement avec le nombre d'objets. Pour 8 objets, il existe déjà 40 320 permutations différentes. Si nous considérons un ensemble abstrait de $n$ objets, le « groupe symétrique sur $n$ lettres » est la collection de toutes les permutations différentes de ces $n$ objets, ainsi que les règles de combinaison des permutations.

La théorie des représentations permet d'étudier le groupe symétrique en le représentant par d'autres objets mathématiques qui donnent un aperçu des principales caractéristiques du groupe. La théorie des

représentations du groupe symétrique est un sous-domaine bien développé qui a des applications importantes en mathématiques et dans d'autres domaines scientifiques tels que la mécanique quantique. Il s'avère que, pour le groupe symétrique à $n$ lettres, les éléments constitutifs de toutes ses représentations sont indexés par les « partitions » de $n$. Une partition d'un nombre $n$ est simplement une suite de nombres strictement positifs dont la somme est égale à $n$. Par exemple, $2+3+3+4+12$ est une partition de 24.

Grâce au langage des partitions, la théorie des représentations est liée à une autre branche des mathématiques appelée « combinatoire », qui est l'étude des objets ayant des parties discrètes et distinctes. De nombreux phénomènes continus en mathématiques sont liés en vertu d'une sous-structure discrète commune, ce qui soulève des questions combinatoires. Les phénomènes continus peuvent également être discrétisés, ce qui permet de les soumettre aux méthodes de la combinatoire. Les partitions font partie des objets combinatoires les plus élémentaires. Leur étude remonte au moins au XVIIIe siècle.

Le hasard entre dans la combinatoire lorsque l'on considère de très grands objets combinatoires tels que l'ensemble de toutes les partitions d'un très grand nombre. Si l'on considère que la partition d'un nombre consiste à le découper aléatoirement en plus petits nombres, on peut se demander quelle est la probabilité d'obtenir une partition particulière. Des questions de même nature se posent dans la théorie des représentations des grands groupes symétriques. De tels liens entre les probabilités et la théorie des représentations ont été envisagés par des mathématiciens russes dans les années 1970 et 1980. La clé pour trouver le bon outil de la théorie des probabilités adapté à cette question consiste à considérer les partitions comme des représentations du groupe symétrique. Andreï Okounkov, un Russe qui a étudié à l'université d'État de Moscou, a assimilé ce point de vue et l'a déployé avec un succès spectaculaire pour s'attaquer à un large éventail de problèmes.

L'un de ses premiers résultats marquants concernait les « matrices aléatoires », qui ont été largement étudiées en physique. Une matrice aléatoire est un tableau carré de nombres dans lequel chaque nombre est choisi au hasard. À chaque matrice aléatoire on associe à un ensemble de nombres caractéristiques appelés « valeurs propres » de la matrice. À partir des années 1950, les physiciens ont étudié les propriétés statistiques des valeurs propres des matrices aléatoires afin de mieux comprendre le problème de la prédiction et de la distribution des niveaux d'énergie

des noyaux. Ces dernières années, les matrices aléatoires ont bénéficié d'un regain d'attention de la part des mathématiciens et des physiciens.

Okounkov a démontré une connexion fascinante entre les matrices aléatoires et les sous-suites strictement croissantes dans les permutations de nombres. Une sous-suite strictement croissante est exactement ce que le nom suggère. Par exemple, dans une permutation des nombres de 1 à 8, disons 71452638, on voit que 14568 et 1238 sont deux sous-suites strictement croissantes. Baik, Deift et Johansson ont déterminé les fluctuations statistiques de la plus longue sous-suite strictement croissante d'une permutation aléatoire lorsque $n$ tend vers l'infini. Ils ont remarqué qu'il s'agit des mêmes fluctuations que celles de la plus grande valeur propre d'une matrice hermitienne aléatoire (étudiées par Tracy et Widom). Baik et ses collaborateurs ont également donné une version plus générale de leur résultat sous la forme d'une conjecture. Okounkov a démontré cette conjecture en utilisant une approche très différente et originale en montrant que ces deux problèmes de fluctuation sont liés à un troisième problème commun qui concerne le comptage de surfaces aléatoires. Ce travail a permis d'établir un lien nouveau et direct entre la théorie des matrices aléatoires et les permutations aléatoires, ainsi qu'un lien avec la géométrie algébrique, ce qui a servi de base à certains des travaux ultérieurs d'Okounkov dans ce domaine.

Les surfaces aléatoires apparaissent également dans les travaux d'Okounkov en mécanique statistique. Si par exemple on chauffe un cristal cubique à partir d'une basse température, on constate que les coins du cube sont rongés à mesure que le cristal « fond ». La géométrie de ce processus de fusion peut être visualisée en imaginant qu'un coin est constitué d'un ensemble de petits blocs. La fonte du cristal correspond à l'élimination de blocs au hasard. En considérant la partition du cristal en petits blocs comme analogue à la partition des entiers, Okounkov a appliqué ses méthodes caractéristiques à l'analyse des surfaces aléatoires qui en résultent. En collaboration avec Richard Kenyon, Okounkov a obtenu le résultat surprenant que la partie fondue du cristal, lorsqu'elle est projetée en deux dimensions, a une forme très particulière. Elle est toujours entourée d'une courbe algébrique, c'est-à-dire d'une courbe qui peut être définie par des équations polynomiales. La courbe, en forme de cœur, est appelée cardioïde. Le lien avec la géométrie algébrique réelle est tout à fait inattendu.

Au cours des dernières années, Okounkov a écrit avec Rahul Pandharipande et d'autres collaborateurs une longue série d'articles sur des questions de géométrie énumérative, un domaine qui a une longue his-

toire et qui a été enrichi ces dernières années par l'échange d'idées entre les mathématiciens et les physiciens. Une façon classique d'étudier les courbes algébriques consiste à faire varier les coefficients des équations polynomiales qui définissent les courbes, puis à imposer des conditions, par exemple que les courbes passent par un ensemble spécifique de points. Avec trop peu de conditions, la collection de courbes reste infinie. Avec trop de conditions, la collection est vide. Mais avec un bon équilibre de conditions, on obtient une collection finie de courbes. Le problème du « comptage des courbes » de cette manière, un problème ancien en géométrie algébrique qui a également été soulevé en théorie des cordes, est la principale préoccupation de la géométrie énumérative. Okounkov et ses collaborateurs ont apporté des contributions substantielles à la géométrie énumérative, en introduisant des idées issues de la physique et en déployant une large gamme d'outils issus de l'algèbre, de la combinatoire et de la géométrie. Les recherches en cours d'Okounkov dans ce domaine représentent une merveilleuse interaction entre les idées des mathématiques et de la physique.

**Bibliographie**

— Kenyon (Richard), « Les travaux d'Andrei Okounkov sur le modèle des dimères », *Gazette des mathématiciens*, 2007, n° 112, p. 18-22.

# Médaille Fields : Grigori Perelman

> « pour ses contributions à la géométrie et ses idées révolutionnaires sur la structure analytique et géométrique du flot de Ricci ».

**Communiqué de presse**

Le nom de Grigori Perelman est pratiquement connu de tous les scientifiques. Les travaux qu'il a menés en 2002-2003 ont apporté des éléments novateurs dans l'étude des équations d'évolution et de leurs singularités. Plus important encore, ses résultats fournissent un moyen de résoudre deux problèmes en suspens en topologie : la conjecture de Poincaré et la conjecture de géométrisation de Thurston. À l'été 2006, la communauté mathématique était encore en train de vérifier son travail pour s'assurer qu'il était entièrement correct et que les conjectures avaient été démontrées. Après plus de trois ans d'examen minutieux, les meilleurs experts n'ont rencontré aucun problème sérieux dans ce travail.

Grigori Perelman est né en 1966 dans ce qui était alors l'Union soviétique. Il a obtenu son doctorat à l'université d'État de Saint-Pétersbourg. Dans les années 1990, il a séjourné aux États-Unis, notamment en tant que boursier à l'université de Californie à Berkeley. Pendant quelques années, il a été chercheur au département de Saint-Pétersbourg de l'institut de mathématiques Steklov. En 1994, il a été conférencier invité au congrès international des mathématiciens à Zurich.

Depuis des décennies, la conjecture de Poincaré est considérée comme l'un des problèmes les plus importants des mathématiques. La conjecture a bénéficié d'une attention accrue de la part du grand public lorsqu'elle a été désignée comme l'un des sept problèmes du prix du millénaire établi par l'institut de mathématiques Clay en 2000. L'institut s'est engagé à décerner un prix d'un million de dollars américains pour la solution de chaque problème. Les travaux de Perelman sur la conjecture de Poincaré constituent le premier candidat sérieux à l'un de ces prix.

La conjecture de Poincaré concerne la topologie, qui étudie les propriétés fondamentales des formes qui restent inchangées lorsqu'elles

sont déformées, c'est-à-dire étirées, tordues ou pliées, mais pas déchirées. Un exemple simple de forme de ce type est la sphère de dimension 2, qui est la surface d'une boule dans un espace tridimensionnel. Une autre façon de visualiser la sphère de dimension 2 est de prendre un disque situé dans le plan à deux dimensions et d'identifier les points du bord du disque à un seul point. Ce point peut être considéré comme le pôle nord de la sphère. Bien que globalement la sphère de dimension 2 soit très différente du plan, chaque point de la sphère se trouve dans une région qui ressemble au plan. Cette propriété de ressembler localement au plan est la propriété qui définit une variété de dimension 2. Le « tore », c'est-à-dire la surface d'une bouée, est un autre exemple de variété de dimension 2.

Bien que la sphère de dimension 2 et le tore se ressemblent localement, leurs topologies sont globalement distinctes : sans faire un trou dans la sphère de dimension 2, il n'y a aucun moyen de la déformer pour en faire un tore. Une autre façon de voir cette distinction est de considérer un lacet situé sur la sphère de dimension 2. Quel que soit l'endroit où il se trouve, le lacet peut être rétréci jusqu'à un point, le rétrécissement s'effectuant entièrement à l'intérieur de la sphère. Imaginons maintenant un lacet situé sur le tore : si le lacet fait le tour du trou, il ne peut pas être réduit à un point. Si dans une variété, les lacets peuvent être réduits à un point, cette variété est dite « simplement connexe ». La sphère de dimension 2 est simplement connexe, alors que le tore ne l'est pas. L'analogue de la conjecture de Poincaré en dimension 2 serait l'affirmation que toute variété de dimension 2 simplement connexe de taille finie peut être déformée en une sphère de dimension 2 ; cette affirmation est correcte. Il est donc naturel de se demander ce que l'on peut dire des variétés de dimension 2 non simplement connexes. Il s'avère qu'elles peuvent toutes être classées en fonction du nombre de trous : elles sont toutes des déformations du tore, ou du double tore (avec deux trous), ou du triple tore (la surface d'un bretzel), etc. On a en fait besoin de deux autres hypothèses techniques dans cette discussion, la compacité et l'orientabilité.

La géométrie offre une autre façon de classer les variétés de dimension 2. Lorsque l'on considère les variétés d'un point de vue topologique, il n'y a pas de notion de distance. Le fait de doter une variété d'une métrique permet de mesurer la distance entre les points de la variété et conduit à la notion géométrique de courbure. Les variétés de dimension 2 peuvent être classées en fonction de leur géométrie. Une variété de dimension 2 à courbure positive peut être déformée en une sphère

de dimension 2. Une variété de dimension 2 à courbure nulle peut être déformée en un tore. Une variété de dimension 2 à courbure négative peut être déformée en un tore avec plus d'un trou.

La conjecture de Poincaré, dont l'origine remonte au mathématicien français Henri Poincaré en 1904, concerne les variétés de dimension 3. La sphère de dimension 3 est un exemple de base : par analogie avec la sphère de dimension 2, on obtient la sphère de dimension 3 en prenant une boule de dimension 3 et en identifiant ses points aux bords à un seul point. Tout comme l'espace à 3 dimensions est le lieu le plus naturel pour la sphère de dimension 2, le lieu le plus naturel pour la sphère de dimension 3 est l'espace à 4 dimensions, qui est bien sûr plus difficile à visualiser. Toute variété de dimension 3 simplement connexe peut-elle être déformée en une sphère de dimension 3 ? La conjecture de Poincaré affirme que la réponse à cette question est oui. Tout comme pour les variétés de dimension 2, on peut espérer une classification des variétés de dimension 3. Dans les années 1970, William Thurston, lauréat de la médaille Fields, a formulé une nouvelle conjecture, appelée conjecture de géométrisation de Thurston, qui permet de classer toutes les variétés de dimension 3. La conjecture de géométrisation de Thurston offre une vision globale des variétés de dimension 3 et inclut en fait la conjecture de Poincaré comme cas particulier. Thurston a proposé que, d'une manière analogue au cas des variétés de dimension 2, les variétés de dimension 3 puissent être classées à l'aide de la géométrie. Mais l'analogie ne va pas très loin : les variétés de dimension 3 sont beaucoup plus diverses et complexes que les variétés de dimension 2.

Thurston a identifié et analysé huit structures géométriques et a conjecturé qu'elles permettaient de classer les variétés de dimension 3. Son travail a révolutionné l'étude de la géométrie et de la topologie. Les huit structures géométriques ont été étudiées de manière intensive et la conjecture de géométrisation a été vérifiée dans de nombreux cas. Thurston lui-même l'a démontrée pour une grande classe de variétés. Mais les espoirs d'une démonstration de la conjecture dans toute sa généralité sont restés insatisfaits.

En 1982, Richard Hamilton a identifié une équation d'évolution particulière, qu'il a appelée le flot de Ricci, comme étant la clé pour résoudre la conjecture de Poincaré et la conjecture de géométrisation de Thurston. Le flot de Ricci est similaire à l'équation de la chaleur, qui décrit comment la chaleur diffuse de la partie chaude d'un objet vers la partie froide, homogénéisant finalement la température pour qu'elle soit uniforme dans l'ensemble de l'objet. L'idée de Hamilton était

d'utiliser le flot de Ricci pour homogénéiser la géométrie des variétés de dimension 3 afin de montrer que leur géométrie correspondait à la classification de Thurston. Pendant plus de vingt ans, Hamilton et d'autres analystes géomètres ont fait de grands progrès dans la compréhension du flot de Ricci. Mais ils n'ont pas réussi à trouver comment traiter les « singularités », c'est-à-dire les régions où la géométrie, au lieu d'être homogénéisée, présente soudain des variations incontrôlées.

Les choses en étaient là lorsque les travaux de Perelman ont fait irruption sur la scène. Dans une série d'articles publiés à partir de la fin 2002 sur un site qui archive des prépublications, Perelman a établi des résultats révolutionnaires sur le flot de Ricci et ses singularités. Il a proposé de nouvelles méthodes d'analyse de la structure des singularités et a montré comment elles sont liées à la topologie des variétés. Perelman a mis fin à l'impasse du programme lancé par Hamilton et a validé l'idée d'utiliser le flot de Ricci pour démontrer la conjecture de Poincaré et la conjecture de géométrisation de Thurston. Bien que les travaux de Perelman semblent mettre un terme définitif à la démonstration des conjectures, ses contributions ne s'arrêtent pas là. Les techniques introduites par Perelman pour traiter les singularités dans le flot de Ricci ont suscité un grand intérêt en analyse géométrique et commencent à être déployées pour résoudre d'autres problèmes dans ce domaine.

La combinaison des idées profondes et du génie technique de Perelman fait de lui un mathématicien exceptionnel. En ouvrant la voie à la réponse à deux questions fondamentales en topologie tridimensionnelle, il a eu un impact profond sur les mathématiques.

**Bibliographie**


— Anderson (Michael T.), « Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci » (trad. Z. Djadli), *Gazette des mathématiciens*, 2005, nº 103, p. 24-41.
— Bessières (Laurent), « Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman », *Gazette des mathématiciens*, 2005, nº 106, p. 7-35.
— Bessières (Laurent), Besson (Gérard) et Boileau (Michel), « La preuve de la conjecture de Poincaré d'après G. Perelman », *Images des mathématiques*, 2006.
— Besson (Gérard), « De Poincaré à Perelman: une épopée mathématique du xxe siècle », *Un texte, un mathématicien*, 2015.

— Bourguignon (Jean-Pierre), « Espaces courbes de Gauss à Perelman, en passant par Einstein », *Un texte, un mathématicien*, 2010.
— Gessen (Masha), *La légende Grigori Perelman* (trad. É. Châtelain), Paris, Flammarion, 2018.
— Ghys (Étienne), « Géométriser l'espace: de Gauss à Perelman », *Images des mathématiques*, 2007.
— O'Shea (Donal), *Grigori Perelman face à la conjecture de Poincaré* (trad. J. Randon-Furling), Paris, Dunod, 2007.
— Szpiro (George), *La conjecture de Poincaré* (trad. B. Sigaud), Paris, J.-C. Lattès, 2007.

# Médaille Fields : Terence Tao

> « pour ses contributions à la théorie des équations aux dérivées partielles, à la combinatoire, à l'analyse harmonique et à la théorie additive des nombres ».

**Communiqué de presse**

Terence Tao est un mathématicien particulièrement doué pour résoudre les problèmes ouverts. Ses travaux spectaculaires ont eu un impact sur plusieurs domaines mathématiques. Il allie une grande puissance technique, une ingéniosité hors du commun pour trouver de nouvelles idées et un point de vue étonnamment naturel, qui amène les autres mathématiciens à se demander pourquoi personne n'y avait pensé avant.

Terence Tao est né à Adélaïde en Australie en 1975. Il a obtenu son doctorat en mathématiques en 1996 à l'université de Princeton. Il est professeur de mathématiques à l'université de Californie à Los Angeles. Parmi les distinctions qu'il a reçues, citons une bourse de la fondation Sloan, une bourse de la fondation Packard et une bourse de l'institut de mathématiques Clay. Il a reçu le prix Salem (2000), le prix Bôcher de la Société mathématique américaine (2002) et son prix Conant (2005, conjointement avec Allen Knutson).

À 31 ans, Tao a rédigé plus de 80 articles de recherche, avec plus de 30 collaborateurs. Ses centres d'intérêt couvrent un large éventail de mathématiques, notamment l'analyse harmonique, les équations aux dérivées partielles non linéaires et la combinatoire. « Je travaille dans un certain nombre de domaines, mais je ne les considère pas comme déconnectés », a-t-il déclaré dans un entretien publié dans le rapport annuel de l'institut de mathématiques Clay. « J'ai tendance à considérer les mathématiques comme un sujet unifié et je suis particulièrement heureux lorsque j'ai l'occasion de travailler sur un projet qui implique plusieurs domaines à la fois. »

En raison du large éventail de ses réalisations, il est difficile de résumer brièvement l'œuvre de Tao. Quelques points forts peuvent donner une idée de l'ampleur et de la profondeur du travail de ce mathématicien extraordinaire.

Le premier fait marquant est le travail de Tao avec Ben Green, un nouveau résultat spectaculaire sur les éléments fondamentaux des mathématiques, les nombres premiers. Green et Tao se sont attaqués à une question classique qui a probablement été posée pour la première fois il y a deux siècles : l'ensemble des nombres premiers contient-il des progressions arithmétiques de longueur quelconque ? Une « progression arithmétique » est une suite de nombres entiers qui diffèrent d'une quantité fixe : $(3, 5, 7)$ est une progression arithmétique de longueur 3, où les nombres diffèrent de 2 ; $(109, 219, 329, 439, 549)$ est une progression de longueur 5, où les nombres diffèrent de 110. Une grande avancée dans la compréhension des progressions arithmétiques a eu lieu en 1974, lorsque le mathématicien hongrois Endre Szemerédi a démontré que tout ensemble infini de nombres ayant une « densité strictement positive » contient des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Un ensemble a une densité strictement positive si, pour un nombre $n$ suffisamment grand, il y a toujours un pourcentage fixe d'éléments de $\{1, 2, 3, ...n\}$ dans l'ensemble. Le théorème de Szemerédi peut être envisagé de différents points de vue. Il en existe aujourd'hui au moins trois démonstrations différentes, dont la démonstration originale de Szemerédi et celle de Timothy Gowers, lauréat de la médaille Fields en 1998. Les nombres premiers n'ont pas une densité strictement positive ; le théorème de Szemerédi ne s'applique donc pas à eux. En fait, les nombres premiers deviennent de plus en plus rares à mesure que l'on s'approche de l'infini. De manière remarquable, Green et Tao ont démontré que, malgré cette rareté, les nombres premiers contiennent des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Tout résultat qui jette un nouvel éclairage sur les propriétés des nombres premiers constitue une avancée significative. Ce travail fait preuve d'une grande originalité et d'une grande perspicacité et apporte une solution à un problème profond, fondamental et difficile.

Un autre point fort de la recherche de Tao est son travail sur le problème de Kakeya, qui peut être décrit dans sa forme originale de la manière suivante. Supposons qu'une aiguille soit posée à plat sur un plan. Imaginons les différentes formes possibles lorsque l'on fait pivoter l'aiguille de 180 degrés. L'une des formes possibles est un demi-disque. Avec un peu plus de soin, on peut effectuer la rotation à l'intérieur d'un quart de disque. Le problème de Kakeya est le suivant : quelle est l'aire minimale de la forme balayée par la rotation de l'aiguille de 180 degrés ? La réponse surprenante est que l'aire peut être aussi petite que l'on souhaite, de sorte que l'aire minimale est dans un certain sens nulle. La

dimension fractale de la forme balayée fournit une information plus fine sur la taille de la forme que celle que l'on obtient en mesurant sa surface. Un résultat fondamental du problème de Kakeya indique que la dimension fractale de la forme balayée par l'aiguille est toujours égale à 2.

Imaginez maintenant que l'aiguille ne se trouve pas dans un plan, mais dans un espace à $n$ dimensions, où $n$ est strictement supérieur à 2. Le problème de Kakeya à $n$ dimensions pose la question suivante : quel est le volume minimal d'une forme à $n$ dimensions dans laquelle l'aiguille peut être tournée dans n'importe quelle direction ? Comme dans le cas bidimensionnel, ce volume peut être aussi petit que l'on veut. Mais une question plus cruciale se pose : que peut-on dire de la dimension fractale de cette forme à $n$ dimensions ? Personne ne connaît la réponse à cette question. La technique pour démontrer que la dimension fractale est toujours égale à 2 dans le plan ne fonctionne pas pour les dimensions supérieures. Le problème de Kakeya à $n$ dimensions est intéressant en soi et présente également des connexions fondamentales avec d'autres problèmes mathématiques, par exemple l'analyse harmonique et les ondes non linéaires. Terence Tao a joué un rôle majeur ces dernières années dans l'étude du problème de Kakeya à $n$ dimensions et dans l'élucidation de ses connexions avec d'autres problèmes dans ce domaine.

Un autre problème sur lequel Tao a travaillé est celui de « l'application d'onde ». Ce sujet apparaît naturellement dans l'étude de la théorie de la relativité générale d'Einstein, selon laquelle la gravité est une onde non linéaire. Personne ne sait comment résoudre complètement les équations de la relativité générale qui décrivent la gravité. Cependant, les équations deviennent beaucoup plus simples si l'on considère un cas particulier où les équations ont une symétrie cylindrique. Un aspect de ce cas plus simple est appelé le problème de l'application d'onde. Tao a développé un programme qui permettrait de comprendre sa solution. Bien que ce travail n'ait pas atteint un point final définitif, les idées de Tao ont levé un obstacle psychologique majeur en démontrant que les équations ne sont pas insolubles, provoquant ainsi une résurgence de l'intérêt pour ce problème.

Un quatrième point fort du travail de Tao est centré sur les équations de Schrödinger non linéaires. Ces équations servent notamment à décrire le comportement de la lumière dans un câble à fibre optique. Les travaux de Tao ont permis de mieux comprendre le comportement d'une équation de Schrödinger particulière et de produire des résultats

précis sur l'existence de solutions. Il a effectué ce travail en collaboration avec quatre autres mathématiciens, James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani et Hideo Takaoka. Ensemble, ils sont connus sous le nom d'« équipe I », où « I » désigne de nombreuses choses différentes, notamment « interaction ». Ce mot fait référence à la manière dont la lumière peut interagir avec elle-même dans un milieu tel qu'une fibre optique. Cette auto-interaction se reflète dans le terme non linéaire de l'équation de Schrödinger que l'équipe a étudiée. Le mot « interaction » fait également référence aux interactions entre les membres de l'équipe. La collaboration est en effet l'une des caractéristiques du travail de Tao. « La collaboration est très importante pour moi, car elle me permet d'en apprendre davantage sur d'autres domaines et inversement de partager avec d'autres ce que j'ai appris sur mes propres domaines », a-t-il déclaré lors de l'entretien accordé à l'institut Clay. « Cela élargit mon expérience non seulement d'un point de vue technique et mathématique, mais aussi parce que je suis exposé à d'autres philosophies de recherche et d'exposition. »

Ces points forts du travail de Tao ne disent pas tout. Par exemple, de nombreux mathématiciens ont été surpris lorsque Tao et son coauteur Allen Knutson ont produit un travail magnifique sur un problème connu sous le nom de conjecture de Horn, qui se pose dans un domaine que l'on pourrait croire très éloigné de l'expertise de Tao. C'est un peu comme si un grand romancier de langue anglaise produisait soudainement un roman russe de référence. La polyvalence, la profondeur et les prouesses techniques de Tao garantissent qu'il restera une force puissante dans le domaine des mathématiques dans les décennies à venir.

**Bibliographie**


— « Entretien avec Terence Tao », CultureMath, 2023.
— Borrelli (Vincent) et Rullière (Jean-Luc), « Les aiguilles tournent, le mystère demeure », *Images des mathématiques*, 2014.
— Brion (Michel), « La conjecture de Horn: quelques développements récents », *Gazette des mathématiciens*, 2015, n° 143, p. 51-59.
— Duchesne (Bruno), « Nombres premiers et progressions arithmétiques », *Images des mathématiques*, 2011.
— Tao (Terence), *L'art de résoudre les problèmes de mathématiques* (trad. F. André), Paris, Cassini, 2020.
— Tao (Terence), *Le cours d'analyse de Terence Tao* (trad. F. Santos), Malakoff, Dunod, 2022.

— Tzvetkov (Nikolay), « Terence Tao et les équations aux dérivées partielles : un bref aperçu », *Gazette des mathématiciens*, 2007, n° 112, p. 23-25.

# Médaille Fields : Wendelin Werner

> « pour ses contributions aux progrès sur l'évolution de Loewner stochastique, la géométrie du mouvement brownien bidimensionnel et la théorie conforme des champs ».

**Communiqué de presse**

Les travaux de Wendelin Werner et de ses collaborateurs représentent l'une des interactions les plus passionnantes et les plus fructueuses entre les mathématiques et la physique ces derniers temps. Les recherches de Werner ont permis de développer un nouveau cadre conceptuel pour comprendre les phénomènes critiques qui surviennent dans les systèmes physiques et ont apporté de nouvelles perspectives géométriques qui n'existaient pas auparavant. Les idées théoriques issues de ces travaux, qui combinent la théorie des probabilités et des idées issues de l'analyse complexe classique, ont eu un impact important à la fois en mathématiques et en physique et peuvent être reliées à un grand nombre d'applications.

Né en 1968 en Allemagne, Wendelin Werner est de nationalité française. Il a obtenu son doctorat à l'université Paris-VI en 1993. Il est professeur de mathématiques à l'université Paris-Sud à Orsay depuis 1997. De 2001 à 2006, il a également été membre de l'Institut universitaire de France. Depuis 2005, il est détaché à temps partiel à l'École normale supérieure de Paris. Parmi ses distinctions, on peut citer le prix Rollo-Davidson (1998), le prix de la Société mathématique européenne (2000), le prix Fermat (2001), le grand prix Jacques-Herbrand (2003), le prix Loève (2005) et le prix Pólya (2006).

Les travaux de Wendelin Werner sont motivés par la physique statistique, où la théorie des probabilités est utilisée pour analyser le comportement à grande échelle de systèmes complexes à plusieurs particules. Un exemple standard d'un tel système est celui d'un gaz : bien qu'il soit impossible de connaître la position de chaque molécule de l'air dans la pièce où vous vous trouvez, la physique statistique indique qu'il est extrêmement improbable que toutes les molécules se retrouvent dans un coin de la pièce. De tels systèmes peuvent présenter des transitions de phase qui marquent un changement soudain dans

leur comportement macroscopique. Par exemple, lorsque l'eau est portée à ébullition, elle subit une transition de phase, passant de l'état liquide à l'état gazeux. Un autre exemple classique de transition de phase est l'aimantation spontanée du fer, qui dépend de la température. À ces points de transition de phase, les systèmes peuvent présenter des phénomènes dits critiques. Ils peuvent sembler aléatoires à n'importe quelle échelle (et en particulier au niveau macroscopique) et présenter une « invariance d'échelle », ce qui signifie que leur comportement général semble statistiquement identique à toutes les échelles. Ces phénomènes critiques sont remarquablement compliqués et sont loin d'être complètement compris.

En 1982, le physicien Kenneth G. Wilson a reçu le prix Nobel pour son étude des phénomènes critiques, qui a permis d'expliquer l'« universalité » : de nombreux systèmes physiques différents se comportent de la même manière lorsqu'ils s'approchent d'un point critique. Ce comportement est décrit par des fonctions dans lesquelles une quantité (par exemple la différence entre la température réelle et la température critique) est élevée à un exposant, appelé « exposant critique » du système. Les physiciens ont conjecturé que ces exposants sont universels dans le sens où ils ne dépendent que de certaines caractéristiques qualitatives du système et non de ses détails microscopiques. Bien que les systèmes auxquels Wilson s'est intéressé soient principalement tridimensionnels et quadridimensionnels, les mêmes phénomènes se produisent également dans les systèmes bidimensionnels. Au cours des années 1980 et 1990, les physiciens ont fait de grands progrès dans le développement de la théorie conforme des champs, qui permet d'étudier les phénomènes critiques bidimensionnels. Toutefois, cette approche était difficile à comprendre d'un point de vue mathématique rigoureux et ne fournissait pas d'image géométrique du comportement des systèmes. L'une des grandes réalisations de Wendelin Werner, avec ses collaborateurs Gregory Lawler et Oded Schramm, a été de développer une nouvelle approche des phénomènes critiques en deux dimensions qui est mathématiquement rigoureuse et qui fournit une image géométrique directe des systèmes à leurs points critiques et à proximité de ceux-ci.

La percolation est un modèle qui représente par exemple le comportement de base d'un gaz qui percole à travers un milieu aléatoire. Ce milieu peut être un réseau horizontal de tuyaux, où chaque tuyau est ouvert ou bloqué avec une certaine probabilité. Un autre exemple est le comportement de polluants dans un aquifère. On aimerait être capable

de comprendre à quoi ressemble l'ensemble des sites pollués. Les physiciens et les mathématiciens étudient des modèles schématiques de percolation tels que le suivant. Tout d'abord, imaginons un plan carrelé d'hexagones. Pour un hexagone donné, la probabilité qu'il soit coloré en noir est $p$ et la probabilité qu'il soit coloré en blanc est alors $1 - p$. Si nous désignons un point du plan comme étant l'origine, nous pouvons nous demander quelles parties du plan sont connectées à l'origine par des chemins noirs monochromatiques. Cet ensemble est l'amas contenant l'origine. Si $p$ est inférieur à 1/2, il y aura moins d'hexagones noirs que d'hexagones blancs, et l'ensemble contenant l'origine sera fini. Inversement, si $p$ est supérieur à 1/2, il y a une probabilité strictement positive que l'amas contenant l'origine soit infini. Le système subit une transition de phase à la valeur critique $p = 1/2$.

Cette valeur critique correspond au cas où l'on tire à pile ou face pour choisir la couleur de chaque hexagone. Dans ce cas, on peut démontrer que tous les amas sont finis et que, aussi grande que soit la portion du réseau que l'on choisit d'observer, on trouvera (avec une forte probabilité) des amas de taille comparable à cette portion.

Le modèle de percolation a suscité l'intérêt des physiciens théoriciens, qui ont utilisé diverses techniques non rigoureuses pour prédire certains aspects de son comportement critique. En particulier, il y a une quinzaine d'années, le physicien John Cardy a utilisé la théorie conforme des champs pour prédire certaines propriétés à grande échelle de la percolation à son point critique. Werner et ses collaborateurs Lawler et Schramm ont étudié l'objet continu qui apparaît lorsque l'on prend la limite à grande échelle, c'est-à-dire lorsque l'on permet à la taille de l'hexagone de devenir de plus en plus petite. Ils ont déterminé un grand nombre de propriétés de cet objet, comme par exemple la dimension fractale des bords des amas. Combinés aux résultats de Stanislav Smirnov en 2001 sur le modèle de percolation et aux résultats antérieurs de Harry Kesten, ces travaux ont conduit à une détermination complète des exposants critiques pour ce modèle particulier.

Un autre modèle bidimensionnel est le mouvement brownien planaire, qui peut être considéré comme la limite à grande échelle d'une marche aléatoire discrète. La marche aléatoire discrète décrit la trajectoire d'une particule qui choisit au hasard une nouvelle direction à chaque unité de temps. La géométrie des trajectoires browniennes planaires est assez complexe. En 1982, Benoît Mandelbrot a conjecturé que la dimension fractale de la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne est 4/3. La résolution de cette conjecture semblait hors de

portée des techniques probabilistes classiques. Lawler, Schramm et Werner ont démontré cette conjecture tout d'abord en montrant que la frontière extérieure des trajectoires browniennes et les frontières extérieures des amas de percolation continue sont similaires, puis en calculant leur dimension commune à l'aide d'une construction dynamique des amas de percolation continue. En utilisant la même stratégie, ils ont également calculé les valeurs étroitement liées des « exposants d'intersection » pour le mouvement brownien et les marches aléatoires simples qui avaient été conjecturés par les physiciens B. Duplantier et K.-H. Kwon (l'un de ces exposants d'intersection décrit la probabilité que les trajectoires de deux marches restent disjointes jusqu'à un temps très grand). D'autres travaux de Werner ont mis en évidence des symétries supplémentaires de ces frontières extérieures de boucles browniennes.

Un autre résultat de Wendelin Werner et de ses collaborateurs est la démonstration de l'« invariance conforme » de certains modèles bidimensionnels. L'invariance conforme est une propriété semblable à l'invariance d'échelle, mais plus subtile et plus générale. Elle se trouve à la base de la définition des objets continus étudiés par Werner. En gros, on dit qu'un objet bidimensionnel aléatoire présente une invariance conforme si sa déformation par des transformations qui préservent les angles (appelées transformations conformes, objets de base de l'analyse complexe) a la même loi que l'objet lui-même. L'hypothèse selon laquelle de nombreux systèmes bidimensionnels critiques présentent une invariance conforme est l'un des points de départ de la théorie conforme des champs. Le résultat susmentionné de Smirnov a démontré l'invariance conforme pour la percolation. Werner et ses collaborateurs ont démontré l'invariance conforme pour deux modèles bidimensionnels classiques, la marche aléatoire à boucles effacées et l'arbre couvrant uniforme étroitement lié, et ont décrit leurs limites d'échelle. Un grand défi dans ce domaine est maintenant de démontrer des résultats d'invariance conforme pour d'autres systèmes bidimensionnels.

Les mathématiciens et les physiciens ont développé des approches très différentes pour comprendre les phénomènes critiques bidimensionnels. Les travaux de Wendelin Werner ont contribué à combler le fossé entre ces approches, enrichi les deux domaines et ouvert de nouveaux champs de recherche fructueux. Ses travaux spectaculaires continueront d'influencer les mathématiques et la physique dans les décennies à venir.

**Bibliographie**


— Le Gall (Jean-François), « Les travaux de Wendelin Werner », *Gazette des mathématiciens*, 2007, n° 112, p. 7-17.
— Le Gall (Jean-François), « Wendelin Werner », *Images des mathématiques*, 2006.
— Werner (Wendelin), « Lacets et invariance conforme », dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 3*, Paris, Cassini, 2007, p. 139-164.
— Werner (Wendelin), *Percolation et modèle d'Ising*, Paris, Société mathématique de France, 2009.
— Werner (Wendelin), « Karl Löwner et les découpages de formes », *Un texte, un mathématicien*, 2013.

# Prix Gauss : Kiyoshi Itō

> « pour avoir posé les fondations de la théorie des équations différentielles stochastiques et du calcul stochastique.
>
> « Le travail d'Itō a émergé comme l'une des innovations mathématiques majeures du XXe siècle et a trouvé un vaste champ d'applications en dehors des mathématiques. Le calcul d'Itō est devenu un outil de base dans des domaines tels que l'ingénierie (par exemple pour le filtrage, la stabilité et le contrôle en présence de bruit), la physique (par exemple pour la turbulence et la théorie conforme des champs) et la biologie (par exemple pour la dynamique des populations). Il est à présent d'une importance particulière en économie et en finance, avec le calcul du prix des options comme exemple principal. »

**Communiqué de presse**

Le premier lauréat du nouveau prix Gauss pour les applications des mathématiques est le mathématicien japonais Kiyoshi Itō, âgé de 90 ans. Le prix récompense ses réalisations dans le domaine de l'analyse stochastique, un domaine des mathématiques essentiellement fondé sur ses travaux novateurs. L'analyse stochastique est l'art de modéliser des événements aléatoires qui peuvent se produire littéralement à tout moment. Le roi Juan Carlos d'Espagne remettra lui-même le prix lors de la cérémonie d'ouverture du Congrès international des mathématiciens à Madrid le 22 août 2006.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), connu sous le nom de *princeps mathematicorum* (« prince des mathématiciens »), réunit en sa personne deux aspects des mathématiques d'une manière classique. Il a non seulement réalisé de grands progrès dans la théorie des nombres, surnommée la « reine des mathématiques » parce qu'elle était glorieuse et éloignée de toute application dans le monde réel, une affirmation qui était valable jusqu'à il y a quelques décennies, mais il a également créé ce que l'on appelle aujourd'hui la « méthode des moindres carrés », une méthode que l'on applique chaque fois que l'on est confronté à des problèmes du monde réel, en particulier à des imprécisions dans les mesures.

C'est donc à juste titre que le prix nouvellement créé pour « la recherche mathématique qui a eu un impact en dehors des mathématiques, que ce soit dans le domaine de la technologie, des affaires ou simplement dans la vie quotidienne des gens » porte le nom de Gauss. Le prix est décerné conjointement par la Société allemande de mathématiques et par l'Union mathématique internationale, et administré par la première. Il se compose d'une médaille et d'une somme d'argent (actuellement évaluée à 10 000 euros). La source du prix est l'excédent du Congrès international des mathématiciens qui s'est tenu en 1998 à Berlin. Le prix sera décerné pour la première fois lors du congrès de cette année à Madrid.

Le lauréat est le mathématicien japonais Kiyoshi Itō, âgé de 90 ans. Ses travaux théoriques, qui ont eu un impact considérable, montrent de manière paradigmatique que le chemin est long et complexe entre le phénomène réel et sa description mathématique abstraite, puis son application à un problème de la vie réelle.

Dans le cas d'Itō, ce chemin commence par un coup d'œil au microscope montrant des grains de pollen ou des particules de poussière dans l'eau qui se déplacent de manière erratique. Aujourd'hui, cette étrange danse est appelée mouvement brownien, du nom du botaniste écossais Robert Brown qui l'a observée en 1827 et en a donné une description détaillée. Les particules sont poussées par un grand nombre de molécules d'eau dont les impacts s'annulent, mais pas complètement. Ce que l'on voit est l'effet net d'un grand nombre de collisions. C'est Albert Einstein qui a formulé un modèle mathématique du mouvement brownien dans l'un de ses trois articles de 1905, qui ont tous constitué une révolution scientifique. Norbert Wiener (1894-1964), mieux connu comme le fondateur de la cybernétique, a poursuivi en 1923 en apportant la démonstration que le modèle d'Einstein était mathématiquement valable.

Il s'est avéré qu'Einstein et Wiener avaient trouvé une idéalisation mathématique du hasard pur. Tout ce qui déplace des particules de poussière dans l'eau, fait croître ou décroître une file d'attente à la caisse, ou fait monter ou baisser le prix d'une action en bourse, peut être décrit de manière plausible par un processus de Wiener. Ce modèle est à peu près aussi universel que la loi normale de Gauss, qui apparaît chaque fois qu'une quantité est influencée par de nombreuses perturbations indépendantes.

Cette idéalisation a toutefois un prix. Les physiciens partent normalement du principe que la nature se comporte de manière lisse. Mais

un processus de Wiener viole cette hypothèse fondamentalement. La trajectoire de la particule est « infiniment sinueuse », c'est-à-dire qu'elle est en termes techniques « nulle part dérivable ». De plus, elle est infiniment longue. Il y a à peine une centaine d'années, les mathématiciens se détournaient avec horreur de ces « monstres », car ils ne pouvaient être traités avec les outils classiques de manipulation des courbes.

L'un de ces outils classiques est l'intégrale, qui est enseignée dans sa forme de base au lycée. Pour calculer l'aire d'une courbe, il faut la découper en un grand nombre de petites bandes, toutes rectangulaires à l'exception d'un petit morceau incurvé au sommet. On remplace ces petites courbes par des lignes horizontales de façon à obtenir un ensemble de rectangles dont l'aire est facile à calculer. Dans la limite de bandes infiniment étroites, on obtient l'intégrale, ce qui ne pose aucun problème pour un intervalle sur la droite réelle, mais qui est manifestement impossible pour un mouvement brownien.

C'est alors qu'Itō entre en scène. En fait, il a dû refaire le processus classique qui conduit à la définition de l'intégrale, mais dans des conditions beaucoup plus sévères. Un travail long et fastidieux, commencé en 1942, a abouti à un nouveau concept appelé « intégrale stochastique », comprenant des règles de calcul et une théorie des solutions pour les équations différentielles stochastiques. Une équation différentielle ordinaire est la forme utilisée par les mathématiciens pour décrire le mouvement d'une particule sous l'effet d'une force connue (déterministe) ; une équation différentielle stochastique inclut en plus des forces qui dépendent par exemple d'un processus de Wiener.

Le retour de ce cadre théorique à la réalité est également difficile. Une intégrale stochastique en elle-même ne peut jamais être la solution finale d'un problème. On ne peut pas connaître à l'avance un processus stochastique. Si on le pouvait, il ne serait pas aléatoire. Il est donc inutile de se demander où se trouvera un point soumis à une équation différentielle stochastique dans cinq minutes ou quand il passera pour la première fois devant une ligne donnée. Mais la méthode d'Itō fournit des probabilités pour les événements de ce type.

Prenons, au lieu de la position d'une particule, l'actif d'un joueur à la roulette ou la valeur du portefeuille d'un investisseur. Ces personnes ont un intérêt vital à savoir quand cette valeur, qui dépend du hasard et de leurs propres actions, atteint pour la première fois la valeur zéro, car c'est à ce moment-là que le jeu est terminé. Les joueurs peu enclins à prendre des risques, en particulier les banquiers, veulent orienter leurs propres actions de manière à minimiser les effets du hasard.

C'est l'idée qui sous-tend les instruments financiers tels que les options et les contrats à terme. Une option d'achat revient à parier sur un événement futur comme le prix d'une action. La banque doit donc prendre des dispositions pour disposer de l'argent le jour où elle risque de perdre le pari ; le coût de ces dispositions est le prix de l'option que la banque facture au client. La banque est toutefois libre de prendre ces dispositions, en fonction du cours réel de l'action, à tout moment à partir de maintenant et jusqu'à l'échéance de l'option. Le prix de l'option doit donc être exprimé, et calculé, par une intégrale stochastique.

À l'heure actuelle, il s'agit de l'application la plus populaire et la plus influente de la théorie d'Itō. Au début des années 70, les économistes Fischer Black, Myron S. Scholes et Robert C. Merton ont trouvé une formule explicite pour calculer le prix d'une option. Aujourd'hui, la formule de Black et Scholes, qui ne contient que des données connues, est à la base de presque toutes les transactions financières qui impliquent des options ou des contrats à terme : elle a d'ailleurs valu à Merton et Scholes le prix de la Banque de Suède en sciences économiques (Black est décédé en 1995).

Mais la théorie d'Itō est suffisamment abstraite pour répondre à des besoins complètement différents. Au-delà de la position des particules et du cours des actions, elle s'applique aussi à la taille d'une population d'organismes vivants, à la fréquence d'un certain allèle dans le patrimoine génétique d'une population, voire à des quantités biologiques plus complexes. Dans ces cas, le hasard n'est pas complètement aveugle : la fluctuation moyenne de la taille d'une population n'est pas une constante mais est proportionnelle à la taille elle-même, la fréquence de deux allèles qui occupent environ la moitié de la population a tendance à changer plus rapidement que si l'un d'entre eux est proche de l'extinction. Il fallait donc généraliser le concept de processus de Wiener, ce qui aurait été presque impossible sans le cadre théorique d'Itō. Au final, les biologistes peuvent évaluer la probabilité qu'un gène se répande dans l'ensemble de la population ou qu'une espèce survive.

Ces généralisations, à leur tour, ont été utiles aux économistes. En 1985, John C. Cox, Stephen A. Ross et Jonathan E. Ingersoll ont trouvé un modèle mathématique pour l'évolution temporelle des taux d'intérêt (le processus CIR), qui est aujourd'hui devenu la norme. En 1993, Stephen L. Heston a généralisé le modèle de Black et Scholes afin de le rapprocher de la réalité.

D'autre part, les mathématiciens eux-mêmes ont mis un certain temps à apprécier l'importance des résultats d'Itō. Cela est dû en partie à l'isolement du Japon pendant la seconde guerre mondiale. Ce n'est qu'à partir de 1954 qu'Itō a donné des conférences sur ses réalisations à l'Institut d'étude avancée de Princeton.

De plus, il existait une théorie concurrente pour décrire les effets du hasard à un niveau plus global. Si vous voulez savoir comment une goutte d'encre se disperse dans l'eau, vous pouvez soit essayer de suivre le mouvement brownien de particules d'encre isolées, soit considérer l'encre et l'eau comme un continuum et formuler leur mouvement en termes d'équation aux dérivées partielles, une équation de diffusion dans ce cas. Il est évident que les deux méthodes décrivant le même phénomène physique, elles devraient aboutir aux mêmes résultats, et il devrait donc y avoir un lien entre elles. Il a fallu un certain temps pour mettre en évidence ce lien, mais il a déjà été utilisé à bon escient. La formule de Black et Scholes contient la solution d'une équation de diffusion.

Aujourd'hui, il ne fait aucun doute que l'analyse stochastique est une branche des mathématiques riche, importante et fructueuse qui a un impact formidable sur « la technologie, les affaires ou simplement la vie quotidienne des gens ».

**Bibliographie**


— Berglund (Nils), « 1951 : le calcul d'Itō », *Images des mathématiques*, 2020.
— El Karoui (Nicole), « De la théorie de la spéculation aux mathématiques de l'aléatoire: un aller-retour », *Un texte, un mathématicien*, 2007.
— Yor (Marc), « Quelques aspects de l'œuvre de Kiyoshi Itō », *Images des mathématiques*, 2008.

# Prix Nevanlinna : Jon Kleinberg

> « pour ses contributions profondes, créatives et perspicaces à la théorie mathématique du système mondial de l'information, notamment l'algorithme influent « pôles et autorités », des méthodes pour découvrir des chaînes courtes dans des grands réseaux sociaux, des techniques pour modéliser, identifier et analyser les rafales dans les flux de données, des modèles théoriques de la croissance des communautés dans les réseaux sociaux, et des contributions à la théorie mathématique du regroupement ».

**Communiqué de presse**

Les travaux de Jon Kleinberg ont permis d'apporter des éclairages théoriques sur d'importantes questions pratiques qui sont devenues essentielles pour comprendre et gérer notre monde de plus en plus interconnecté. Il a travaillé dans un large éventail de domaines, allant de la théorie des réseaux au routage, en passant par l'exploration de données, la génomique comparative et l'analyse de la structure des protéines. Outre ses contributions fondamentales à la recherche, Kleinberg a mené une réflexion approfondie sur l'impact de la technologie dans les sphères sociales, économiques et politiques.

L'une des plus importantes contributions de Kleinberg à la recherche porte sur la structure du réseau de la toile mondiale. Ses idées ont grandement influencé le fonctionnement des principaux moteurs de recherche actuels. Alors que les pages individuelles sur la toile ont un certain degré de structure imposé par leurs créateurs, la structure de la toile mondiale dans son ensemble n'est absolument pas planifiée ; elle émerge continuellement au fur et à mesure que de nouveaux contenus et de nouveaux liens sont ajoutés. Par conséquent, la conception de méthodes efficaces pour sélectionner les pages pertinentes sur la toile à proposer aux utilisateurs de moteurs de recherche est un problème difficile à résoudre. Avant les travaux de Kleinberg, les moteurs de recherche se concentraient uniquement sur le contenu des pages sur la toile, et non sur la structure des liens. En 1996, Kleinberg a introduit l'idée d'« autorités » et de « pôles » : une autorité est une page sur la toile qui contient des informations sur un sujet particulier, et un

pôle est une page qui contient des liens vers de nombreuses autorités. Prenons l'exemple de la recherche « appareil photo numérique ». Un site qui propose des guides et des critiques d'appareils photo numériques serait un pôle, et le site d'un fabricant d'appareils photo numériques serait une autorité. Bien que l'idée de pôle et d'autorité soit claire intuitivement, il est difficile de définir ces notions mathématiquement en raison de la circularité qui en découle : un pôle est un site qui pointe vers de nombreuses autorités ; une autorité est un site qui a des liens avec de nombreux pôles. La principale contribution de Kleinberg a été de trouver un moyen de briser cette circularité, ouvrant ainsi la voie à une analyse mathématique de la structure des liens dans les réseaux. Il a développé des outils algorithmiques pour ce problème et a démontré leur efficacité en les testant sur la toile mondiale.

Un autre domaine dans lequel Kleinberg a réalisé des avancées fondamentales est celui des réseaux « petit monde ». Ces réseaux ont été remarqués pour la première fois lors d'expériences menées dans les années soixante par le psychologue Stanley Milgram et ont fait l'objet d'une série de modèles mathématiques basés sur les travaux de Duncan Watts et Steve Strogatz dans les années quatre-vingt-dix. Dans les expériences de Milgram, une personne A était invitée à transmettre une lettre à une personne B, qu'elle ne connaissait pas personnellement, en un minimum d'étapes. Chaque personne de la chaîne ne pouvait transmettre la lettre qu'à une personne qu'elle connaissait personnellement. Milgram a observé qu'en moyenne, la lettre parvenait à B après avoir été transmise par six personnes (d'où l'expression « six degrés de séparation »). Le nombre six est étonnamment faible, compte tenu de la taille de la population dans son ensemble et du fait que chaque personne n'opère que sur la base d'informations locales concernant le réseau social. Jusque dans les années quatre-vingt-dix, la littérature en sciences sociales s'est beaucoup intéressée à l'existence de courts chemins entre les individus dans les réseaux sociaux. Mais on ne s'est guère penché sur la manière de trouver des chemins courts en ne disposant que d'informations locales. Comment les personnes qui ne connaissent que leurs amis immédiats et n'ont pas une vision globale de l'ensemble du réseau peuvent-elles trouver les chemins les plus courts ? C'est à cette question que Kleinberg s'est attaqué, et il a fait des découvertes surprenantes.

Les nœuds d'un réseau social sont les personnes qui le composent ; deux nœuds sont reliés si les deux personnes se connaissent. Kleinberg a observé que dans les réseaux petit monde, la probabilité que deux nœuds

soient reliés diminue avec l'augmentation de la distance géographique qui les sépare. Il a également montré que, si la probabilité d'un lien entre deux nœuds d'un réseau diminue avec le carré de la distance qui les sépare, il existe des algorithmes efficaces pour trouver le chemin le plus court entre les deux nœuds. De manière plus surprenante, il a montré que si la diminution est plus rapide ou plus lente que le carré de la distance, il n'existe pas d'algorithme efficace. Outre l'élucidation des aspects théoriques des réseaux petit monde, les travaux de Kleinberg se sont avérés utiles pour la conception de systèmes de partage de fichiers pair à pair, dans lesquels l'information doit être localisée sans index central.

L'un des premiers résultats de Kleinberg concernait également des algorithmes efficaces, cette fois pour le problème de la recherche des « plus proches voisins » dans des ensembles de données en grande dimension. Ce problème se pose dans le cadre suivant. Supposons que vous disposiez d'un ensemble de documents et d'un dictionnaire de $n$ mots. Pour chaque document, vous comptez le nombre de fois où le premier mot du dictionnaire apparaît, le nombre de fois où le deuxième mot apparaît, le nombre de fois où le troisième mot apparaît, et ainsi de suite. Vous obtenez ainsi $n$ décomptes, qui peuvent être considérés comme un vecteur de dimension $n$ qui représente le document. Pour un document A donné, comment identifier son plus proche voisin, c'est-à-dire le document B qui est le plus similaire à A parmi tous les documents de l'ensemble ? En considérant A et B comme des vecteurs, vous voulez trouver B de telle sorte que la distance entre A et B soit la plus petite possible. Une solution consiste bien sûr à calculer simplement la distance entre A et chaque autre vecteur, puis à voir quelle est la plus petite distance. Mais si le nombre $n$ de mots dans le dictionnaire est très grand, on a affaire à un espace de très grande dimension. Dans les espaces de grande dimension, la technique de force brute qui consiste à vérifier simplement toutes les possibilités se heurte rapidement au « fléau de la dimension » et devient coûteuse en temps et en argent. Kleinberg est sorti de cette impasse en développant une nouvelle approche ingénieuse du problème du plus proche voisin, en combinant de manière aléatoire des projections unidimensionnelles des vecteurs.

Un autre point fort des travaux de Kleinberg est le développement d'un modèle mathématique pour reconnaître les « rafales » dans les flux de données. L'une des façons d'analyser la structure des informations contenues dans un flux de données textuelles consiste à rechercher les

rafales d'activité qui apparaissent soudainement et se maintiennent pendant un certain temps. Par exemple, même si vous ne parlez pas anglais, si vous observez l'apparition soudaine et fréquente du mot « Katrina » dans les dépêches du mois d'août 2005, vous saurez qu'il se passe quelque chose d'important. Kleinberg a commencé à étudier les rafales pour une raison très pratique : il voulait trouver un meilleur moyen d'organiser les énormes archives de courriels personnels qu'il accumulait. Si l'idée d'une rafale d'informations est intuitivement claire, il n'est pas facile d'en donner une définition rigoureuse, car il est difficile de distinguer les rafales des fluctuations statistiques dans une mer d'informations aléatoires. La principale contribution de Kleinberg a été de fournir une définition rigoureuse des rafales, en utilisant le concept mathématique de modèles de Markov. Il a testé ses idées sur une série de données différentes, telles que les titres d'articles de recherche sur plusieurs décennies de recherche dans un domaine donné. Dans ce cas, les rafales correspondent à l'apparition de nouveaux sujets dans ce domaine de recherche et à l'attention qui leur est accordée.

L'interaction entre la compréhension théorique des réseaux et l'observation de réseaux réels en action a nourri les recherches de Kleinberg et apporté de nouvelles perspectives sur le rôle de la technologie dans la société. « Internet et la toile mondiale nous obligent à réfléchir aux conséquences sociales d'un monde dans lequel l'information est plus abondante et circule plus largement que jamais, et dans lequel n'importe qui a la possibilité, grâce à de nouveaux types de médias et à très peu de frais, de devenir un auteur ayant une audience mondiale », a écrit Kleinberg lors d'un entretien par courrier électronique avec le magazine en ligne *Technology Research News*. « Mais il y a un certain nombre de défis fondamentaux à relever. Nous savons que le discours en ligne peut être très polarisé ; est-il vrai que les outils en ligne que nous avons créés contribuent à un niveau croissant de polarisation dans le dialogue public en général ? Comment pouvons-nous évaluer ce phénomène avec précision et comment pouvons-nous envisager de concevoir de nouveaux outils qui rendent le discours en ligne plus productif ? »

Le travail de Kleinberg se distingue par sa richesse et sa diversité, ainsi que par sa capacité à utiliser des idées théoriques et une compréhension approfondie pour résoudre des problèmes pratiques. Cette puissante combinaison garantit que Kleinberg sera l'un des principaux penseurs de l'informatique théorique dans les années à venir.

Jon Kleinberg est né en 1971 à Boston, dans le Massachusetts, aux

États-Unis. Il a obtenu son doctorat en 1996 à l'institut de technologie du Massachusetts. Il est professeur d'informatique à l'université Cornell. Il a notamment reçu une bourse de la fondation Sloan (1997), une bourse de la fondation Packard (1999) et le prix des initiatives en matière de recherche de l'Académie nationale des sciences des États-Unis (2001). En 2005, Kleinberg a reçu une bourse MacArthur « génie » de la fondation John D. et Catherine T. MacArthur.

# Le congrès de 2010

# Médaille Fields : Elon Lindenstrauss

> « pour ses résultats sur la rigidité des mesures en théorie ergodique et leurs applications à la théorie des nombres ».

**Présentation (par Julie Rehmeyer)** [2]

Elon Lindenstrauss a développé des outils théoriques extraordinairement puissants en théorie ergodique, un domaine des mathématiques conçu à l'origine pour comprendre la mécanique céleste. Sa très bonne compréhension de la théorie ergodique lui a ensuite permis de les utiliser pour résoudre une série de problèmes importants dans des domaines mathématiques apparemment très éloignés. On s'attend à ce que ses méthodes permettent de nouvelles révélations mathématiques dans les décennies à venir.

La théorie ergodique s'intéresse aux systèmes dynamiques, qui sont simplement des modèles mathématiques qui décrivent comment un système change avec le temps. Un système dynamique peut par exemple modéliser la trajectoire d'une boule sur un billard sans frottement et sans trou. La boule se déplace en ligne droite jusqu'à ce qu'elle atteigne le bord, contre lequel elle rebondit comme si elle était réfléchie par un miroir. Si la table de billard est rectangulaire, ce système dynamique est assez simple et prévisible, car une boule lancée dans n'importe quelle direction va rebondir sur chacun des quatre côtés avec toujours le même angle. Mais imaginons que la table de billard soit en forme de stade, avec des extrémités arrondies. Dans ce cas, une boule partant de presque n'importe quelle position dans presque n'importe quelle direction va parcourir le stade dans tous les sens, rebondissant sur le bord suivant des angles toujours changeants. Les systèmes qui présentent ce genre de comportements compliqués sont qualifiés d'« ergodiques ».

Pour décrire cette notion de trajectoires parcourant l'ensemble de l'espace disponible, les mathématiciens parlent de « mesure ergodique ». On peut penser à une mesure comme à une façon souple de calculer les aires. Pour un système dynamique, posséder une mesure ergodique signifie essentiellement que la position du système va passer la même fraction de temps dans deux régions de l'espace si celles-ci ont la même

2. Traduction de Benoît Kloeckner.

aire. Au contraire, dans le billard rectangulaire (qui n'est bien sûr pas ergodique), le centre verra très peu de trafic dans presque toutes les directions.

Dans beaucoup de systèmes dynamiques, il y a plusieurs mesures ergodiques, c'est-à-dire plusieurs façon de calculer l'aire suivant laquelle les parties d'aires égales voient passer aussi souvent les trajectoires. En fait, les mesures invariantes sont même souvent en nombre infini. Cependant, Lindenstrauss a montré que dans certains circonstances, il ne peut y avoir qu'un très petit nombre de mesures ergodiques. Cette propriété se révèle être un outil extrêmement puissant, une sorte de marteau qui peut casser des problèmes difficiles.

Lindenstrauss s'est effectivement servi de son marteau pour casser des problèmes durs. Un exemple est fourni par ce qu'on appelle les « approximations diophantiennes », c'est-à-dire le problème de trouver des nombres rationnels qui approchent bien un nombre irrationnel. Ainsi, $\pi$ est très proche de 22/7. Le nombre rationnel 179/57 est un peu plus proche encore, mais comme son dénominateur est beaucoup plus grand il n'est pas nécessairement aussi utile. Au début du XIXe siècle, le mathématicien allemand Johann Dirichlet a proposé un critère pour juger de la qualité d'une approximation : que l'imprécision d'une approximation rationnelle $p/q$ soit inférieure à $1/q^2$. Il a ensuite démontré assez simplement que tout nombre irrationnel admet une infinité d'approximations qui vérifient ce critère. Il a donc montré que pour tout nombre réel $\alpha$, il y a une infinité d'entiers $p$ et $q$ tels que $|\alpha - p/q| < 1/q^2$.

Il y a quatre-vingt ans, le mathématicien britannique John Edensor Littlewood a proposé un énoncé analogue à celui de Dirichlet concernant les approximations simultanées de deux nombres irrationnels : il pensait qu'il devrait être possible de trouver des approximations $p/q$ de $\alpha$ et $r/q$ de $\beta$, telles que le produit des deux imprécisions puisse être rendu aussi petit que voulu. Plus précisément, soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels et $\varepsilon > 0$. Alors il s'agit de montrer qu'il existe des approximations $p/q$ de $\alpha$ et $r/q$ de $\beta$ telles que

$$|\alpha - p/q| \times |\beta - r/q| < \varepsilon/q^3.$$

Il donna le problème à son étudiant de thèse en pensant que la démonstration ne pouvait pas être beaucoup plus difficile que celle de Dirichlet. Mais la conjecture de Littlewood s'est révélée extraordinairement difficile. Jusqu'à récemment, il n'y avait eu aucun progrès substantiel la concernant.

Alors Lindenstrauss appliqua ses outils de théorie ergodique à la

question dans un travail commun avec Manfred Einsiedler et Anatole Katok. La théorie ergodique peut paraître un choix étrange pour un problème qui n'implique ni système dynamique ni temps, mais les associations incongrues sont parfois les plus puissantes. Reformulons le problème de Littlewood de façon à faire apparaître la connexion : tout d'abord, imaginons un carré et collons le côté du haut avec le côté du bas de manière à obtenir un cylindre. Maintenant, en collant le côté droit sur le côté gauche nous obtiendrons une forme qu'on appelle un tore et qui ressemble à une bouée. On peut rouler sur lui-même le plan entier et obtenir cette forme, en appliquant un point du plan de coordonnées $(x, y)$ sur le point du carré dont l'abscisse est la partie décimale de $x$, et dont l'ordonnée est la partie décimale de $y$. Ce tore est l'espace de notre système dynamique. On peut alors définir une transformation en envoyant tout point $(x, y)$ sur le point $(x + \alpha, y + \beta)$. Si $\alpha$ et $\beta$ sont irrationnels (ou plus précisément, s'ils ne sont pas rationnellement dépendants), ce système est ergodique. La conjecture de Littlewood se traduit alors par l'affirmation suivante : les trajectoires de ce système passent extrêmement près de l'origine si on itère la transformation un nombre suffisamment grand de fois. Le nombre d'itération sera alors le dénominateur des fractions qui approchent $\alpha$ et $\beta$

En utilisant une reformulation de la conjecture de Littlewood à l'aide d'un système dynamique plus complexe, l'équipe a franchi une étape importante vers sa résolution : ils ont montré que s'il y a des paires de nombres pour lesquels la conjecture est fausse, alors il y en a très peu, une proportion négligeable de tous les nombres.

Un autre exemple de la portée du travail de Lindenstrauss est sa démonstration du premier cas non trivial de la conjecture de l'unique ergodicité quantique arithmétique. Les systèmes ergodiques apparaissent souvent en physique, car par exemple le système commence à se comporter d'une façon plutôt ergodique dès que trois corps interagissent. Mais si les interactions ont lieu à l'échelle quantique, on ne peut pas les décrire à l'aide des outils ordinaires de la théorie ergodique : dans la théorie quantique les points ne suivent pas des trajectoires bien définies, avec des positions bien définies. On est contraint de considérer plutôt la probabilité qu'un point soit présent à un endroit particulier en un instant particulier. Analyser mathématiquement de tels systèmes s'est avéré extraordinairement difficile. Les physiciens doivent se baser sur des simulations numériques sans disposer d'une base mathématique solide.

La conjecture de l'unique ergodicité quantique dit en gros que si

vous calculez les aires en utilisant la mesure qui est naturelle pour la dynamique classique, alors au fur et à mesure que l'énergie du système augmente, cette distribution de probabilités se répartit de plus en plus uniformément dans l'espace disponible. De plus, cette mesure est la seule pour laquelle ceci est vrai. Lindenstrauss a réussi à montrer ceci dans un contexte arithmétique pour un certain type de systèmes dynamiques, obtenant ainsi l'une des premières avancées importantes dans l'étude rigoureuse de la théorie du chaos quantique.

Ils ne s'agit que de deux exemples de résultats remarquables de Lindenstrauss. Ses méthodes, ses outils et sa vision en amèneront probablement beaucoup plus dans les années à venir.

**Bibliographie**

— Michel (Philippe), « Travaux de Elon Lindenstrauss », *Gazette des mathématiciens*, 2010, n° 126, p. 69-75.
— Rehmeyer (Julie), « Les travaux d'Elon Lindenstrauss » (trad. B. Kloeckner), *Images des mathématiques*, 2010.

# Médaille Fields : Ngô Bảo Châu

> « pour sa démonstration du lemme fondamental de la théorie des formes automorphes menée grâce à l'introduction de nouvelles méthodes algébrico-géométriques».

**Présentation (par Julie Rehmeyer)** [3]

Ngô Bảo Châu a surmonté l'un des obstacles importants dans un formidable programme poursuivi depuis des dizaines d'années pour révéler des connexions cachées entre des domaines mathématiques à première vue très éloignés les uns des autres. Il a ainsi fourni des bases mathématiques solides à un ensemble de théories et développé des techniques qui rendront probablement accessible de nombreux nouveaux résultats.

L'histoire de l'exploit de Ngô a commencé en 1967, quand le mathématicien Robert Langlands eut la vision stupéfiante d'une sorte de trou de ver mathématique reliant des domaines qui semblaient à des années lumières. Sa vision était si ambitieuse et improbable que quand il s'en ouvrit au grand théoricien des nombres André Weil, il commença sa lettre par cette note timide : « J'apprécierais que vous acceptiez de lire [ma lettre] comme une pure spéculation ; dans le cas contraire, je suis sûr que vous avez une corbeille à portée de main. » Langlands énonça alors une série de conjectures éblouissantes qui ont depuis guidé les recherches dans tout un pan des mathématiques.

La grande majorité de ces conjectures ne sont toujours pas démontrées et devraient occuper des générations de mathématiciens. Malgré cela, les avancées dans ce programme ont été un moteur puissant menant à de nouveaux résultats mathématiques, en particulier à la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles et celle de la conjecture de Satō-Tate par Richard Taylor. La réalisation complète du programme de Langlands permettrait d'unifier de nombreux domaines des mathématiques contemporaines, dont la théorie des nombres, la théorie des groupes, la théorie des représentations et la géométrie algébrique.

3. Traduction de Benoît Kloeckner.

La vision de Langlands était une sorte de pont franchissant un fossé qui sépare les mathématiques depuis l'époque d'Euclide : la division entre continu et multitude. Le continu est la forme mathématique du beurre, une étendue de matière qui peut être divisée en morceaux aussi petits que l'on veut. Les droites et les courbes, les plans, l'espace dans lequel on vit et les espaces de dimensions encore plus grandes sont des continus et sont couramment étudiés avec les outils de la géométrie et de l'analyse. Les multitudes au contraire sont comme des billes, on peut les regrouper en paquets mais pas les découper sans qu'elles perdent leur essence. Les nombres entiers sont les exemples typiques de multitudes, ils sont étudiés avec les outils de la théorie des nombres. Langlands a prédit que certains nombres qui apparaissent en analyse, précisément les valeurs propres de certains opérateurs qui agissent sur des espaces de « formes automorphes » (ces dernières pouvant être par exemple certaines formes différentielles), sont en fait un code qui une fois décrypté permettrait de classer des objets fondamentaux du monde arithmétique.

L'un des outils développé à partir du programme de Langlands est la « formule des traces d'Arthur-Selberg », une équation qui montre précisément comment certaines informations géométriques permettent de calculer des informations arithmétiques. Non seulement c'est intéressant en soi, mais en plus cette formule est une des étapes vers la démonstration du principe de fonctorialité de Langlands, qui est l'un des piliers du programme. Mais Langlands, en cherchant à appliquer la formule des traces, s'est trouvé confronté à de multiples sommes compliquées qui lui semblaient clairement égales sans qu'il sache comment le montrer. Ça ressemblait à un problème simple qui devrait pouvoir être résolu par de petites astuces combinatoires. Il le qualifia donc de « lemme » — ce terme désigne un résultat mineur mais utile — et le donna à résoudre à son étudiant de thèse. Comme l'étudiant ne parvint pas à le démontrer, Langlands le donna à un second. Puis il travailla lui-même à le démontrer. Puis il consulta d'autres mathématiciens. Alors que tout le monde échouait à le prouver, la nécessité d'utiliser le résultat devenait de plus en plus évidente. Ainsi le problème gagna un titre un peu plus glorieux : celui de « lemme fondamental ».

Après trente ans de travail, seulement quelques cas particuliers en avaient été démontrés. L'absence de démonstration complète était devenue tellement gênante pour le développement de la théorie que de nombreux mathématiciens avaient commencé à supposer qu'il était vrai et à en développer les conséquences, créant un immense pan de

théorie qui s'écroulerait si le résultat se révélait faux.

Ngô Bảo Châu est celui qui est finalement venu à bout du problème. Il s'est d'abord rendu compte qu'on pouvait faire apparaître naturellement les identités compliquées du lemme fondamental à partir de certains objets mathématiques sophistiqués appelés fibrations de Hitchin. Son approche était entièrement nouvelle et inattendue : les fibrations de Hitchin sont purement géométriques et proches de la physique mathématique, presque la dernière chose que quiconque aurait pensé à utiliser pour résoudre ce problème de mathématiques pures.

Il était néanmoins clair qu'il avait trouvé une relation profonde. Son approche transformait l'agaçante complexité du lemme fondamental en un énoncé simple et naturel sur les fibrations de Hitchin. Même avant d'achever la démonstration complète, il avait obtenu quelque chose d'encore plus impressionnant : une réelle compréhension de la question.

De plus, en inscrivant le problème dans une image plus générale, Ngô s'est donné de nouveaux outils puissants pour l'attaquer. En 2004, il avait démontré avec son ancien directeur de thèse Gérard Laumon des cas particuliers importants et difficiles. En 2008, il a résolu le problème dans toute sa généralité grâce à ses nouvelles méthodes.

Ces idées sont tellement novatrices que les mathématiciens s'attendent à ce qu'elles permettent aussi de résoudre un grand nombre d'autres problèmes. Une autre pièce du programme de Langlands, sa « théorie de l'endoscopie », est en ligne de mire.

Ses méthodes pourraient même mener à une piste vers la démonstration du principe de fonctorialité dans son entier, ce qui serait presque l'achèvement de la version originale du programme. Langlands lui-même, toujours un travailleur acharné à 70 ans, a développé une approche du problème très spéculative mais séduisante. Il est encore loin d'être clair que ces idées puissent mener à une démonstration, mais si c'est le cas elles auront besoin de s'appuyer sur le genre d'idées géométriques introduites par Ngô.

**Bibliographie**


— Andler (Martin), « Qui est Ngô Bao Châu? », *Gazette des mathématiciens*, 2010, n° 126, p. 80-81.

— Chaudouard (Pierre-Henri), Harris (Michael) et Laumon (Gérard), « Rapport sur le lemme fondamental », *Gazette des*

*mathématiciens*, nº 128, p. 39-46.
— Laumon (Gérard), « Ngô Bao Châu reçoit la Médaille Fields 2010 », *Gazette des mathématiciens*, 2010, nº 126, p. 82-84.
— Ngô (Bảo Châu), « Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie », *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 2010, nº 111, p. 1-169.
— Ngô (Bảo Châu), *La fonctorialité de Langlands et l'équation fonctionnelle des fonctions L automorphes*, Paris, Collège de France / Fayard, 2022.
— Ngô (Bảo Châu), « La fonctorialité de Langlands et l'équation fonctionnelle des fonctions L automorphes », Leçon inaugurale, Collège de France, 2020.
— Ngô (Bảo Châu), Cours enregistrés, Collège de France, à partir de 2021.
— Rehmeyer (Julie), « Les travaux de Ngô Bao Châu » (trad. B. Kloeckner), *Images des mathématiques*, 2010.

# Médaille Fields : Stanislav Smirnov

> « pour sa démonstration de l'invariance conforme de la percolation et du modèle d'Ising en physique statistique ».

**Présentation (par Julie Rehmeyer)** [4]

Stanislav Smirnov a donné une base mathématique solide à un domaine en pleine croissance de la physique mathématique. Il a donné des preuves élégantes de deux conjectures anciennes et fondamentales en physique statistique, trouvant des symétries surprenantes dans les modèles mathématiques de certains phénomènes physiques.

Le travail de Smirnov, bien que hautement théorique, est relié à des questions étonnamment pratiques. Par exemple, quand l'eau peut-elle s'écouler à travers une couche de terre, ou quand est-elle bloquée en surface ? Pour qu'elle puisse s'écouler, il faut que les petits trous dans la terre soient suffisamment connectés pour qu'un tunnel traverse la couche. C'est une question classique en physique statistique, car le comportement à grande échelle du système (est-ce qu'il existe un chemin continu de pores permettant à l'eau de s'écouler ?) est déterminé par son comportement probabiliste à petite échelle (quelle est la chance qu'un pore soit présent à un endroit donné quelconque).

C'est aussi une question qu'on peut modéliser mathématiquement d'une façon naturelle. Imaginez chaque petite zone de terre comme un point dans une grille ou un réseau et coloriez-le en bleu si l'eau peut s'y écouler et en jaune sinon. Déterminez la couleur de chaque zone en jouant à pile ou face (face pour jaune, pile pour bleu) avec une pièce éventuellement biaisée. Si un chemin de zones bleues contiguës relie deux côtés opposés d'un rectangle alors l'eau peut s'écouler de l'un à l'autre.

Ces « modèles de percolation » se comportent de façon remarquable. Pour des valeurs extrêmes, ils se comportent comme on peut s'y attendre : si la pièce est fortement biaisée en faveur du jaune, l'eau ne pourra presque certainement pas s'écouler ; si la pièce est fortement biaisée en faveur du bleu, l'eau pourra presque certainement s'écouler. Mais la probabilité que l'eau puisse s'écouler ne varie pas régulièrement

4. Traduction de Benoît Kloeckner.

avec l'augmentation de la proportion de zones bleues. En fait, l'eau sera presque sûrement bloquée jusqu'à ce que le pourcentage de zones bleues atteigne un certain seuil à partir duquel la probabilité que l'eau puisse s'écouler commence à augmenter très rapidement. La valeur de ce seuil est appelée le « point critique ». Ce genre de changement brutal de comportement ressemble à ce qui se passe quand de l'eau chauffe : en atteignant une température critique, l'eau se met tout d'un coup à bouillir. C'est pourquoi ce phénomène est couramment appelé une transition de phase.

Évidemment, une couche de terre réelle n'est pas faite de pores proprement réparties verticalement et horizontalement. L'application de ce modèle au monde réel pose donc un certain nombre de questions gênantes. Tout d'abord, quelle finesse choisir pour la grille ? Les physiciens cherchent à comprendre les processus à l'échelle moléculaire, ce qui implique des grilles très fines. Les mathématiciens se demandent alors quelles relations entretiennent les modèles avec des grilles encore plus petites. Ils espèrent qu'à mesure que les grilles deviennent plus fines, les modèles vont approcher de plus en plus un modèle unique correspondant à une grille infiniment fine, appelée une « limite d'échelle ».

Pour comprendre qu'il n'est pas évident qu'une telle limite existe, imaginez que vous ayez choisi un certain pourcentage de zones bleues dans un réseau et que vous calculiez la probabilité que les pores permettent à l'eau de le traverser. Prenez maintenant un réseau plus fin et refaites le calcul. À mesure que la grille s'affine, la probabilité d'écoulement peut s'approcher de plus en plus d'un certain nombre, de la même façon que les nombres 1,9 1,99 1,999 1,9999... s'approchent de 2. Dans ce cas, ce nombre sera la probabilité d'écoulement dans la limite d'échelle. Mais on peut tout à fait imaginer que la probabilité d'écoulement fasse de grands sauts et ne converge jamais vers une limite, comme la suite de nombres 2, 4, 2, 4, 2, 4... Dans ce cas, la probabilité d'écoulement pour le modèle limite est-elle 2 ou 4 ? Il n'y a pas de bonne réponse et il faut donc considérer que la limite d'échelle n'existe pas.

Une autre question qui peut poser problème est la forme du réseau à utiliser. Même en se restreignant à deux dimensions, il y a beaucoup de possibilités : réseaux carrés, triangulaires, en losange... L'idéal serait que le modèle soit « universel », de sorte que le choix de la forme de la grille n'ait pas d'importance, mais il n'est pas évident que ce soit le cas.

Les physiciens sont convaincus qu'aucun de ces problèmes poten-

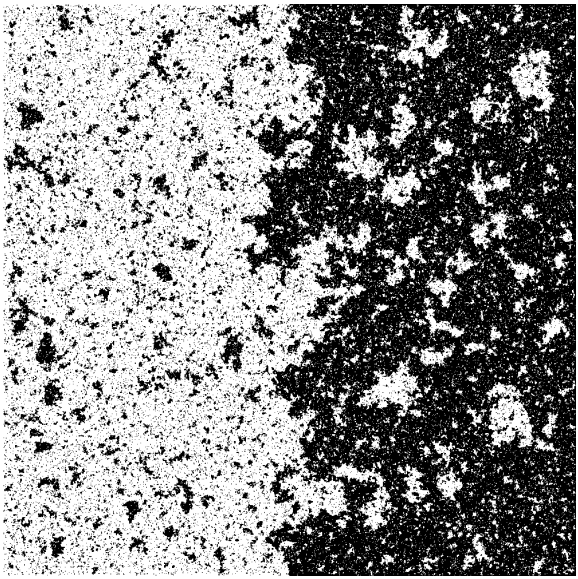
tiels n'est vraiment gênant. Par l'intuition physique, ils ont donné des arguments convaincants indiquant que le modèle va effectivement approcher une limite d'échelle bien définie à mesure que la grille devient plus fine. Ils se sont même persuadés que, bien que la forme du réseau affecte le point critique, elle n'influencera pas la majorité des autres propriétés qui les intéressent.

Les physiciens ont également découvert, pour les réseaux bidimensionnels, les indices d'une belle et surprenante symétrie. Imaginez que vous prenez un réseau de n'importe quelle forme et que vous l'étirez et le compressez, mais en gardant tous les angles inchangés. La mappemonde de Mercator est un exemple d'une telle déformation : les distances sont modifiées et le Groënland y est énorme, mais les méridiens et les parallèles se croisent tout de même à angle droit. Les physiciens se sont convaincus que si vous transformez des modèles de percolation bidimensionnel de cette manière, cela ne changera pas la limite d'échelle (du moins tant que vous restez près du point critique). Pour le dire en termes techniques, ils sont persuadés que les limites d'échelle présentent une « invariance conforme ».

En 1992, John Cardy, un physicien de l'université d'Oxford, s'est basé sur ce point de vue pour atteindre l'un des principaux objectifs de la théorie de la percolation : établir une formule précise qui donne la probabilité d'écoulement de la limite d'échelle des réseaux bidimensionnels près du point critique. Un seul problème : bien que ses arguments physiques soient convaincants, ni lui ni personne d'autre n'est parvenu à transformer cette intuition physique en une démonstration mathématique.

En 2001, Smirnov a établi les fondations mathématiques solides de cette théorie physique. Il a démontré que les limites d'échelle présentent une invariance conforme dans le cas du réseau triangulaire (la forme naturellement prise par des pièces posées à plat sur une table et tassées ensemble). Par la même occasion, il a démontré que la formule de Cardy était correcte dans le cas de ces réseaux. Sa démonstration repose sur une approche indépendante de celles utilisées précédemment par les physiciens, qui a permis de développer de nouvelles idées fondamentales. Elle a aussi fourni une étape cruciale qui manquait à la théorie du processus d'évolution de Schramm-Loewner, une méthode importante récemment développée en physique statistique.

Dans un autre travail majeur, Smirnov a utilisé des méthodes similaires pour comprendre le modèle d'Ising, qui décrit divers phénomènes dont le magnétisme, le mouvement des gaz, le traitement d'images et



l'écologie. Tout comme dans la percolation, les comportements à grande échelle de ces phénomènes sont déterminés par leur comportement probabiliste à petite échelle. Considérons l'exemple du magnétisme : dans un morceau de fer, les atomes se comportent comme de petits aimants, le mouvement des électrons autour du noyau créant un champ magnétique miniature. Les atomes tendent à pousser leurs voisins à avoir le même alignement qu'eux. Quand suffisamment d'atomes ont le pôle nord qui pointe dans la même direction, le morceau de fer entier devient aimanté. Les mathématiciens modélisent ceci en imaginant les atomes placés aux nœuds d'un réseau et en appliquant des règles statistiques pour déterminer si leur pôle nord pointe vers le haut ou vers le bas.

Comme dans le modèle de percolation, le modèle d'Ising fait apparaître une transition de phase : si on chauffe le fer, les atomes se mettent à vibrer plus rapidement, et au-delà d'une certaine température les vibrations sont tellement fortes que les atomes ne s'alignent plus avec leurs voisins. Le morceau perd alors son aimantation.

Les mêmes questions qui intéressent les mathématiciens et les physiciens en percolation s'appliquent au modèle d'Ising. Les grilles devraient être très petites, puisque tout se passe à l'échelle atomique. À

mesure que la maille des grilles s'affine, le modèle converge-t-il vers une version infiniment fine, une limite d'échelle ? Comment la forme du réseau affecte-t-elle la température critique et les autres propriétés du système ? Que se passe-t-il si on étire ou contracte le réseau sans changer les angles ? La limite d'échelle change-t-elle ?

Pour ce modèle également, Smirnov a réussi à montrer qu'il converge vers une limite d'échelle quand la maille devient de plus en plus fine, et que celle-ci présente une invariance conforme. Ensuite, avec Dmitry Chelkak, il a généralisé ces résultats à une large classe de réseaux différents, en établissant une forme d'universalité. Il a également produit des contributions significatives en analyse et en systèmes dynamiques. Son travail continuera d'enrichir à la fois les mathématiques et la physique dans le futur.

**Bibliographie**


— Beffara (Vincent), « La percolation, et un résultat de S. Smirnov », *Gazette des mathématiciens*, 2011, nº 128, p. 5-14.
— Ghys (Étienne), « Un exposé de S. Smirnov », *Images des mathématiques*, 2010.
— Rehmeyer (Julie), « Les travaux de Stanislav Smirnov » (trad. B. Kloeckner), *Images des mathématiques*, 2010.
— Smirnov (Stanislav), « L'ordre et l'irrégularité », Genève, 17/03/2015.
— Smirnov (Stanislav), « Les mathématiques : art ou science ? », Genève, 2020.
— Werner (Wendelin), « Les travaux de Stanislav Smirnov », *Gazette des mathématiciens*, 2010, nº 126, p. 88-92.
— Werner (Wendelin), « Analyticité discrète du modèle d'Ising [d'après Stanislav Smirnov] », Séminaire Bourbaki, exposé nº 1030, 2010.

# Médaille Fields : Cédric Villani

> « pour ses preuves de l'amortissement Landau non linéaire et de la convergence vers l'équilibre dans l'équation de Boltzmann ».

**Présentation (par Julie Rehmeyer)** [5]

Cédric Villani a permis une compréhension mathématique profonde de plusieurs phénomènes physiques. Son interprétation mathématique du concept d'entropie lui a notamment permis de résoudre des problèmes majeurs inspirés par la physique. Ses résultats ont de plus eu des conséquences à l'intérieur des mathématiques, en établissant des relations entre ces deux domaines et en les enrichissant tous les deux.

Villani a commencé sa carrière mathématique en réexaminant l'une des théories les plus frappantes et controversées de la physique du XIXe siècle. En 1872, Ludwig Boltzmann a étudié le comportement d'un gaz initialement contenu dans un récipient, dont on ouvre le couvercle : le gaz s'échappe alors et remplit la pièce. Boltzmann expliquait le phénomène en calculant la probabilité qu'une molécule de gaz se trouve à un endroit précis et se déplace dans une direction précise à un moment donné, alors que la théorie atomique n'était même pas encore complètement acceptée. Plus choquant encore, son équation impliquait une orientation du temps.

Le problème était le suivant : quand les molécules rebondissent les unes sur les autres, leurs interactions sont décrites par la loi de Newton, où le temps est entièrement réversible. Ainsi, en principe, on pourrait arrêter le temps, envoyer chaque molécule dans la direction exacte d'où elle vient et elles retraceraient alors exactement leur chemin en sens inverse, revenant toutes dans le récipient. Mais l'équation de Boltzmann n'est pas réversible : les molécules vont presque toujours d'un état ordonné (dans l'exemple, enfermées dans le récipient) à un état moins ordonné (réparties à travers la pièce). En termes techniques, l'entropie augmente.

Dans les décennies qui ont suivi, les physiciens se sont réconciliés avec l'apparition d'entropie dans des phénomènes gouvernés par des

5. Traduction de Benoît Kloeckner.

lois réversibles et l'entropie est devenue un concept clé en physique, en théorie des probabilités et en théorie de l'information. Toutefois, une question restait sans réponse : à quelle vitesse l'entropie augmente-t-elle ? Des expériences et des simulations numériques ont pu fournir des ordres de grandeur, mais le phénomène restait mal compris.

Villani, avec ses collaborateurs Giuseppe Toscani et Laurent Desvillettes, a développé les fondations mathématiques en permettant une analyse rigoureuse, même quand l'état initial du gaz est très ordonné et que le temps nécessaire pour atteindre son état désordonné d'équilibre est très grand. Cette découverte a eu une conséquence complètement inattendue : si l'entropie augmente toujours, cette augmentation peut être très rapide ou très lente. Son travail a également révélé des relations entre l'entropie et des domaines mathématiques apparemment sans liens, comme l'inégalité de Korn en théorie de l'élasticité.

Par la suite, Villani a tourné sa compréhension profonde de l'entropie vers une autre théorie anciennement controversée. En 1946, le physicien soviétique Lev Davidovitch Landau a avancé une affirmation presque choquante : dans certaines circonstances, un phénomène peut converger vers l'équilibre sans augmenter l'entropie.

Dans un gaz, les deux phénomènes vont toujours de pair. Le gaz qui se répand dans une pièce approche l'équilibre en perdant l'ordre qu'il avait initialement, augmentant son entropie autant que possible. Mais Landau prétendait que pour un plasma, un état de la matière qui ressemble à un gaz mais qui contient tellement d'énergie que les électrons sont arrachés aux atomes, c'était une autre histoire. Dans un plasma, les particules chargées, qui flottent librement, créent un champ électrique qui en retour influence leurs déplacements. Alors que dans un gaz, les particules s'influencent les unes les autres uniquement lors de leurs collisions, les particules d'un plasma s'influencent aussi à distance. Par conséquent, l'équation de Boltzmann pour les gaz ne s'applique pas aux plasmas ; elle doit être remplacée par l'équation de Vlasov-Poisson, qui est réversible et donc incompatible avec l'augmentation de l'entropie.

Cependant les plasmas, comme les gaz, se répandent et tendent à un état d'équilibre. On pensait que ça n'arrivait que parce que des collisions entre atomes avaient également lieu. Mais Landau prétendait que même sans collision, le plasma se rapprocherait de l'équilibre suite à une diminution du champ électrique. Il le démontra, mais seulement pour une version simplifiée, linéaire, de l'équation de Vlassov-Poisson

Malgré de nombreuses recherches, au cours des soixante années

suivantes la compréhension de la convergence vers cet état d'équilibre a peu progressé et on a enregistré peu d'avancées vers la démonstration de la conjecture de Landau pour l'équation de Vlassov-Poisson non linéaire. Villani, en collaboration avec Clément Mouhot, est arrivé l'année dernière à comprendre le phénomène en détail et a démontré que Landau avait raison.

Un troisième grand domaine dans lequel Villani a travaillé semblait initialement n'avoir rien à voir avec l'entropie, jusqu'à ce qu'il leur trouve une relation profonde et transforme le sujet. Il s'agit du transport optimal, qui s'est développé à partir d'une question des plus pratiques : supposons que vous disposiez d'un certain nombre de mines et d'usines, réparties sur un territoire. On se donne les différents coûts de transport pour amener le minerai d'une mine donnée à une usine donnée. Quelle est la répartition la plus économique pour transporter l'ensemble du minerai vers les usines ?

Ce problème a d'abord été étudié par le mathématicien français Gaspard Monge en 1781 et fut redécouvert par le mathématicien russe Leonid Kantorovitch en 1938. Le travail de Kantorovitch sur ce sujet a donné naissance à un domaine de recherche à part entière, la programmation linéaire, lui a valu le « prix Nobel » d'économie en 1975, et a essaimé dans un grand nombre de domaines tels que la météorologie, les systèmes dynamiques, la mécanique des fluides, les réseaux d'irrigation, la reconstruction d'image, la cosmologie, la conception d'antennes et, ces dernières années, les mathématiques.

Villani et Felix Otto ont mis en évidence une relation cruciale quand ils réalisèrent que la diffusion des gaz pouvait être comprise dans le cadre du transport optimal. Une configuration initiale des particules d'un gaz peut être vue comme l'ensemble des mines, et une configuration ultérieure comme l'ensemble des usines (plus précisément, c'est la distribution probabiliste des particules qui joue chacun de ces rôles). Plus les particules de gaz doivent bouger d'une configuration à une autre, plus le coût est élevé.

On peut alors imaginer que chaque configuration possible corresponde à un point dans un paysage montagneux abstrait. La distance entre deux points est définie comme le coût d'un transport optimal et la hauteur de chaque point représente l'entropie de la configuration (les points les plus bas ayant l'entropie la plus grande). Ceci donne une très belle manière de comprendre le comportement d'un gaz se répartissant dans une pièce : tout se passe comme si le gaz était une pierre qui descendait en roulant le long des pentes de ce paysage abstrait, chaque

point de sa trajectoire décrivant son état à un moment donné.

Supposons maintenant qu'un ventilateur soit en marche dans la pièce, de sorte que le gaz ne se répartisse pas uniformément lors de sa diffusion. Mathématiquement, on peut modéliser ce phénomène en considérant que l'espace dans lequel le gaz se déplace est tordu, ou courbé. Villani et Otto ont réalisé que la courbure de la pièce dans laquelle le gaz se répand doit se traduire dans la topographie du paysage abstrait. Cette connexion leur a permis d'appliquer la bonne compréhension mathématique que l'on a de la courbure (en particulier de la courbure de Ricci qui s'est révélée cruciale dans la résolution de la conjecture de Poincaré) pour répondre à des questions sur le transport optimal.

Villani et John Lott ont de plus réussi à généraliser la théorie de la courbure en utilisant ces liens avec le transport optimal. Par exemple, les mathématiciens ne savaient pas comment définir la courbure de Ricci dans certaines situations, notamment en présence d'un coin anguleux. Villani et Lott (et, parallèlement et en utilisant d'autres méthodes, Karl-Theodor Sturm) ont utilisé le transport optimal pour donner une telle définition et pousser la compréhension mathématique de la courbure un cran plus loin. Cette profondeur dans la compréhension et le développement de nouvelles relations entre différents domaines est typique du travail de Villani.

**Bibliographie**


— Desvillettes (Laurent) et Figalli (Alessio), « Cédric Villani reçoit un prix de la Société mathématique européenne », *Gazette des mathématiciens*, 2009, nº 120, p. 76-81.
— Kantor (Jean-Michel), « Entretien avec Cédric Villani, août 2010 », *Images des mathématiques*, 2011.
— Ledoux (Michel), « Géométrie des espaces métriques mesurés: les travaux de Lott, Villani, Sturm », *Séminaire Bourbaki*, 2008, exposé nº 990.
— Mouhot (Clément), « Cédric Villani reçoit la médaille Fields », *Gazette des mathématiciens*, 2010, nº 126, p. 85-87.
— Peyré (Gabriel), « Le transport optimal : de Gaspard Monge à la science des données », Institut Henri Poincaré, 13/10/2018.
— Rehmeyer (Julie), « Les travaux de Cédric Villani » (trad. B. Kloeckner), *Images des mathématiques*, 2010.
— Villani (Cédric), « Transport optimal », dans *Leçons de mathéma-*

*tiques d'aujourd'hui*, vol. 4, Paris, Cassini, 2010, p. 301-338.
— Villani (Cédric), « Amortissement Landau », Bordeaux, 05/07/2011.
— Villani (Cédric), « Peut-on mathématiquement prédire l'avenir du système solaire ? », Espace des sciences, 29/03/2011.
— Villani (Cédric), *Théorème vivant*, Paris, Grasset, 2012.
— Villani (Cédric), « Des triangles, des gaz et des hommes, Nice, 18/04/2012.
— Villani (Cédric), « Des particules, des étoiles et des probabilités », Institut d'astrophysique de Paris, 02/05/2012.
— Villani (Cédric), « La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré, Espace des sciences, 11/09/2012.
— Villani (Cédric), « Les mathématiques de la chauve-souris », Université de Strasbourg, 07/11/2012.
— Villani (Cédric), « Transport optimal et courbure : quand Monge rencontre Riemann, École des Ponts, 30/11/2012.
— Villani (Cédric), « Tout est mathématique », HEC, 11/09/2014.
— Villani (Cédric), « Théorie synthétique de la courbure de Ricci », Institut des hautes études scientifiques, 2015.
— Villani (Cédric), « Les 400 ans de Blaise Pascal, ce précurseur », Espace des sciences, 16/01/2024.

# Prix Gauss : Yves Meyer

> « pour ses contributions fondamentales à la théorie des nombres, à la théorie des opérateurs et à l'analyse harmonique, ainsi que pour son rôle central dans le développement des ondelettes et de l'analyse multirésolution ».

**Présentation (par R. Ramachandran)**

« Chaque fois que vous vous sentez compétent au sujet d'une théorie, abandonnez-la. » Tel a été le principe suivi par Yves Meyer au cours de plus de quatre décennies de travaux de recherche mathématique exceptionnels. Il estime que seuls les chercheurs qui sont novices dans un sujet peuvent faire preuve d'imagination et apporter des contributions importantes. En ce sens, Meyer a connu quatre phases distinctes d'activité de recherche qui correspondent à ses explorations dans quatre domaines disparates : les quasi-cristaux, le programme de Calderón-Zygmund, les ondelettes et les équations de Navier-Stokes. Les sujets variés sur lesquels il a travaillé sont révélateurs de ses vastes centres d'intérêt. Dans chacun d'entre eux, Meyer a apporté des contributions fondamentales. L'ampleur de ses travaux dans chacun d'entre eux suggère qu'il ne quitte pas un domaine de recherche dans lequel il s'est engagé tant qu'il n'est pas convaincu que le sujet a été mené à son terme logique. C'est comme si Meyer apparaissait sur la scène, réglait les différents problèmes, donnait une image unifiée des approches disparates existantes — ce qui jette les bases d'un cadre théorique approprié portant la marque de Meyer — et quittait la scène.

Les germes de l'approche très originale de Meyer dans toutes les branches des mathématiques dans lesquelles il s'est aventuré ont peut-être été semés tôt dans sa carrière. Il a commencé sa carrière de chercheur après avoir été professeur de lycée pendant trois ans, à la suite de ses études universitaires. Il a obtenu son doctorat en 1966 en seulement trois ans. « J'étais mon propre directeur de thèse lorsque j'ai passé mon doctorat », a déclaré Meyer. Cette approche individualiste des problèmes est restée sa marque de fabrique jusqu'à aujourd'hui.

En 1970, Meyer a introduit des idées totalement nouvelles en analyse harmonique (une branche des mathématiques qui étudie la représentation des fonctions ou des signaux comme une superposition de certaines

ondes de base) qui se sont avérées utiles non seulement en théorie des nombres, mais aussi dans la théorie de ce que l'on appelle les quasi-cristaux. Il existe certains nombres algébriques appelés nombres de Pisot-Vijayaraghavan et d'autres appelés nombres de Salem. Ces nombres ont des propriétés remarquables qui apparaissent en analyse harmonique et en approximation diophantienne (approximation des nombres réels par des nombres rationnels). Par exemple, le nombre d'or est un de ces nombres. Yves Meyer a étudié ces nombres et a démontré un résultat remarquable. Les travaux de Meyer dans ce domaine ont conduit à la notion de modèles de Meyer qui ont joué un rôle important dans la théorie mathématique des quasi-cristaux.

Les quasi-cristaux sont des structures qui remplissent l'espace, qui sont ordonnées mais sans symétrie de translation et qui ont un ordre apériodique en général. La théorie classique des cristaux n'autorise que des symétries de rotation d'ordre 2, 3, 4 ou 6, mais les quasi-cristaux présentent une symétrie d'ordre 5 et des symétries d'autres ordres. Tout comme les cristaux, les quasi-cristaux produisent une figure de diffraction de Bragg modifiée, mais là où les cristaux ont une structure répétitive simple, les quasi-cristaux présentent des structures plus complexes comme des pavages apériodiques. Les pavages de Penrose sont un exemple de pareille structure apériodique qui présente une symétrie d'ordre 5. Meyer a étudié certains ensembles dans l'espace euclidien à $n$ dimensions (aujourd'hui connus sous le nom d'ensembles de Meyer) qui sont caractérisés par une certaine propriété de finitude de l'ensemble des distances. L'idée de Meyer était que l'étude de ces ensembles inclut l'étude des structures possibles pour les quasi-cristaux. Cette base formelle est devenue un outil important dans l'étude des structures apériodiques en général.

En 1975, Meyer a collaboré avec Ronald Coifman sur ce que l'on appelle les opérateurs de Calderón-Zygmund. Les résultats importants qu'ils ont obtenus ont donné lieu à plusieurs autres travaux, qui ont débouché sur des applications dans des domaines tels que l'analyse complexe, les équations aux dérivées partielles, la théorie ergodique, la théorie des nombres et la théorie géométrique de la mesure. L'approche de Meyer et Coifman peut être considérée comme l'interaction entre deux paradigmes opposés : l'approche classique de l'analyse complexe et l'approche plus moderne de Calderón-Zygmund, qui s'appuie principalement sur des techniques de variables réelles. Aujourd'hui, c'est cette dernière approche qui domine, même pour les problèmes qui appartiennent en fait au domaine de l'analyse complexe.

L'approche de Calderón-Zygmund était le résultat de la recherche de nouvelles techniques, car les méthodes d'analyse complexe ne fonctionnent plus dans les dimensions supérieures. C'est ce qu'ont fait S. Mihlin, Calderón et A. Zygmund, qui ont étudié et résolu le problème pour une large classe d'opérateurs, que nous appelons aujourd'hui opérateurs intégraux singuliers ou opérateurs de Calderón-Zygmund. Selon Meyer, ces opérateurs intégraux singuliers sont beaucoup plus flexibles que la représentation standard d'un opérateur. Son travail en collaboration avec Coifman sur certains opérateurs intégraux multilinéaires s'est avéré d'une grande importance pour le sujet. Avec Coifman et Alan McIntosh, il a démontré que l'opérateur intégral de Cauchy, qui est l'exemple le plus célèbre d'opérateur intégral singulier, était borné et continu pour toutes les courbes lipschitziennes. Il s'agissait d'un problème ancien en analyse.

Meyer considère que la phase de recherche sur les ondelettes, qui ont eu un impact considérable sur le traitement du signal et sur le traitement d'images, lui a donné une seconde vie scientifique. Une ondelette est une brève oscillation de type ondulatoire dont l'amplitude commence à zéro, croît puis décroît pour revenir à zéro, comme ce qui peut être enregistré par un sismographe ou un électrocardiographe. Mais en mathématiques, les ondelettes sont spécialement construites pour répondre à certaines exigences mathématiques et sont utilisées pour représenter des données ou d'autres fonctions. En tant qu'outil mathématique, elles sont utilisées pour extraire des informations de nombreux types de données, y compris des signaux audio et des images. Des ensembles d'ondelettes sont généralement nécessaires pour analyser les données. Les ondelettes peuvent être combinées avec des parties d'un signal inconnu par la technique de convolution pour en extraire des informations.

La représentation des fonctions sous la forme d'une superposition d'ondes n'est pas nouvelle. Elle existe depuis le début des années 1800, lorsque Joseph Fourier a découvert qu'il pouvait représenter d'autres fonctions en superposant des sinus et des cosinus. Les fonctions sinus et cosinus ont des fréquences bien définies mais s'étendent à l'infini ; autrement dit, si elles sont localisées en fréquence, elles ne le sont pas en temps. Cela signifie que même si nous pouvons déterminer toutes les fréquences d'un signal donné, nous ne savons pas quand elles sont présentes. C'est pourquoi un développement en série de Fourier ne peut pas représenter correctement les signaux transitoires ou les signaux qui présentent des changements brusques. Pendant des décennies,

les scientifiques ont cherché des fonctions plus appropriées que ces simples fonctions sinus et cosinus pour représenter approximativement les signaux irréguliers.

Pour surmonter ce problème, plusieurs solutions ont été développées au cours des dernières décennies pour représenter un signal à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Les efforts dans ce sens ont commencé dans les années 1930 avec la transformée de Wigner, une construction d'Eugène Wigner, le célèbre mathématicien-physicien. Fondamentalement, les ondelettes sont des éléments constitutifs d'espaces fonctionnels plus localisés que les séries et les intégrales de Fourier. L'idée sous-jacente aux représentations conjointes temps-fréquence est de découper le signal d'intérêt en plusieurs parties et d'analyser chaque partie séparément avec une résolution adaptée à son échelle. Dans l'analyse par ondelettes, les fonctions d'approximation appropriées sont contenues dans des domaines finis et conviennent donc parfaitement à l'analyse de données qui présentent des discontinuités marquées.

La question fondamentale à laquelle l'approche par ondelettes tente de répondre est de savoir comment découper le signal. La représentation du domaine temps-fréquence est elle-même limitée par le principe d'incertitude de Heisenberg, selon lequel les domaines temps et fréquence ne peuvent pas être localisés simultanément avec une précision arbitraire. Par conséquent, le déploiement d'un signal dans le plan temps-fréquence est un problème difficile qui peut être comparé à l'écriture de la partition et à l'écoute simultanée de la musique. Des groupes dans divers domaines de recherche ont donc développé des techniques pour découper les signaux localisés dans le temps selon les échelles de résolution qui les intéressent. Ces techniques ont été les précurseurs de l'approche par ondelettes.

La technique d'analyse par ondelettes commence par le choix d'une ondelette prototype, appelée ondelette mère. L'analyse de la résolution temporelle peut être effectuée avec une version contractée à haute fréquence de l'ondelette mère. L'analyse de la résolution en fréquence peut être effectuée à l'aide d'une version dilatée et à basse fréquence de la même ondelette. La transformée en ondelettes ou l'analyse en ondelettes est la solution la plus récente pour surmonter les limitations de la transformée de Fourier. Dans l'analyse par ondelettes, l'utilisation d'une fenêtre modulée entièrement adaptable résout le problème de la découpe du signal mentionné plus haut. La fenêtre est déplacée le long du signal et pour chaque position, le spectre (la transformée) est

calculé. Ce processus est ensuite répété plusieurs fois avec une fenêtre légèrement plus courte (ou plus longue) pour chaque nouveau cycle. Le résultat de cette analyse répétitive du signal est une collection de représentations temporelles du signal, chacune avec une résolution différente ; en bref, une résolution multi-échelle ou une analyse multirésolution. En termes simples, la grande échelle est la vue d'ensemble, tandis que la petite échelle montre les détails. C'est comme un zoom avant sans perte de détails. En d'autres termes, l'analyse par ondelettes permet de voir à la fois la forêt et les arbres.

En géophysique et dans le domaine de l'exploration sismique, on pouvait trouver des modèles qui permettaient d'analyser les formes des ondes qui se propagent dans le sous-sol. Les décompositions multi-échelles d'images ont été utilisées en vision par ordinateur, car l'échelle dépend de la profondeur d'une scène. En traitement audio, des banques de filtres à largeur d'octave constante (filtres dilatés) ont été appliquées à l'analyse des sons et de la parole. Pour traiter le problème de l'effet Doppler, l'analyse multi-échelle des signaux radar a été développée. En physique, les décompositions multi-échelles ont été utilisées en physique quantique par Kenneth G. Wilson pour la représentation des états cohérents et pour analyser les propriétés fractales de la turbulence. En neuro-physiologie, des modèles de dilatation ont été introduits par le physicien G. Zweig pour modéliser les réponses de cellules simples dans le cortex visuel et dans la cochlée auditive. L'analyse par ondelettes allait permettre de réunir ces approches disparates dans un cadre unificateur. Meyer est largement reconnu comme l'un des fondateurs de la théorie des ondelettes.

En 1981, Jean Morlet, un géologue travaillant sur les signaux sismiques, a mis au point ce que l'on appelle les « ondelettes de Morlet », qui donnaient de bien meilleurs résultats que les transformées de Fourier. En fait, Morlet et Alex Grossman, un physicien que Morlet avait contacté pour comprendre la base mathématique de ce qu'il faisait, ont été les premiers à inventer le terme « ondelette » en 1984. Meyer a entendu parler des travaux et a été le premier à réaliser le lien entre les ondelettes de Morlet et des constructions mathématiques antérieures, telles que les travaux de Littlewood et Paley utilisés pour la construction d'espaces fonctionnels et pour l'analyse d'opérateurs singuliers dans le programme de Calderón-Zygmund.

Meyer a étudié s'il était possible de construire une base orthonormée avec des ondelettes. [6] Cela a conduit à son premier résultat fondamental

6. Une base orthonormée est comme un système de coordonnées dans l'espace des

dans le domaine des ondelettes, dans un article du séminaire Bourbaki qui construit un grand nombre de bases orthonormées avec des fonctions de l'espace de Schwartz (fonctions qui n'ont de valeurs significatives que dans une petite région et qui décroissent rapidement à l'extérieur). Cet article a constitué une percée majeure qui a permis l'analyse ultérieure de Meyer. « Dans cet article, dit Stéphane Mallat, la construction de Meyer avait isolé les structures clés dans lesquelles je pouvais reconnaître des similitudes avec les outils utilisés en vision par ordinateur pour l'analyse d'images multi-échelles et en traitement du signal pour les banques de filtres. »

Une collaboration entre Mallat et Meyer a abouti à la construction d'une analyse mathématique multirésolution et à une caractérisation des bases orthonormées d'ondelettes avec des filtres miroirs conjugués qui mettent en œuvre un premier algorithme de transformée en ondelettes plus rapide que l'algorithme de la transformée de Fourier rapide. Grâce au résultat de Meyer et Mallat, les ondelettes sont devenues beaucoup plus faciles à utiliser. On pouvait désormais effectuer une analyse en ondelettes sans connaître la formule de l'ondelette mère. Le processus a été réduit à des opérations simples qui consistent à calculer la moyenne de groupes de pixels et à prendre les différences, encore et encore. Le langage des ondelettes est également devenu plus confortable pour les ingénieurs électriciens

Dans les années quatre-vingt, la révolution numérique était omniprésente et des algorithmes efficaces étaient indispensables pour le traitement des signaux et des images. La norme JPEG pour la compression d'images a été développée à cette époque. En 1987, Ingrid Daubechies, une étudiante de Grossman, a découvert lors d'une visite à l'institut Courant de l'Université de New York et plus tard pendant sa période de travail aux laboratoires Bell de la société AT&T une classe particulière de filtres miroirs conjugués à support compact, qui n'étaient pas seulement orthogonaux (comme ceux de Meyer) mais qui étaient stables et qui pouvaient être mis en œuvre en utilisant des idées simples de filtrage numérique. Les nouvelles ondelettes étaient simples à programmer et il s'agissait de fonctions lisses, contrairement à certaines des fonctions « sautillantes » précédentes. Les processeurs de signaux disposaient désormais d'un outil de rêve : un moyen de décomposer les données numériques en contributions de différentes

fonctions et, comme avec les axes de coordonnées familiers, chaque fonction de base est orthogonale à l'autre. Avec une base orthonormée, on peut représenter chaque fonction de l'espace en termes de fonctions de base.

échelles.

En combinant les idées de Daubechies et de Mallat, il était possible de réaliser une simple transformée orthogonale qui pouvait être rapidement calculée par les ordinateurs numériques modernes. Les ondelettes de Daubechies transforment la théorie en un outil pratique qui peut être facilement programmé et utilisé par un scientifique ayant un minimum de formation mathématique. Le premier article de Meyer pour le séminaire Bourbaki a en fait jeté les bases d'un cadre mathématique approprié pour les ondelettes. Cela a marqué le début de la théorie moderne des ondelettes. Ces dernières années, les ondelettes ont commencé à offrir une alternative intéressante aux méthodes de transformée de Fourier.

Il est intéressant de noter que la première réaction de Meyer aux travaux de Grossman et Morlet a été : « Et alors ? Nous, spécialistes de l'analyse harmonique, savions tout cela depuis longtemps ! » Mais il a réexaminé le travail et s'est rendu compte que Grossman et Morlet avaient fait quelque chose de différent et d'intéressant. Il s'est appuyé sur cette différence pour finalement formuler sa construction de base. « La construction par Meyer des bases orthonormées et les résultats qu'il a obtenus par la suite dans ce domaine ont été la découverte clé qui a ouvert la porte à tous les développements et applications mathématiques ultérieurs. Meyer a été au cœur de la catalyse qui a réuni les mathématiciens, les scientifiques et les ingénieurs qui ont élaboré la théorie et les algorithmes qui en ont résulté », déclare Mallat.

Depuis les travaux de Daubechies et Mallat, les applications explorées comprennent le traitement multirésolution des signaux, la compression des images et des données, les télécommunications, l'analyse des empreintes digitales, la statistique, l'analyse numérique et le traitement de la parole. L'algorithme rapide et stable de Daubechies a été amélioré par la suite dans le cadre d'un travail conjoint entre Daubechies et Albert Cohen, étudiant de Meyer, qui est maintenant utilisé dans la nouvelle norme JPEG2000 pour la compression d'images et fait maintenant partie de la boîte à outils standard pour le traitement des signaux et des images. Des techniques de restauration d'images satellites ont également été développées sur la base de l'analyse par ondelettes.

Plus récemment, il a découvert un lien surprenant entre ses premiers travaux sur les ensembles modèles utilisés pour construire les quasicristaux (les « ensembles de Meyer ») et l'« acquisition comprimée », une technique utilisée pour acquérir et reconstruire un signal en sachant au préalable qu'il est rare ou compressible. Sur cette base, il a développé

un nouvel algorithme pour le traitement des images. Une version de cet algorithme a été installée dans la mission spatiale Herschel de l'Agence spatiale européenne, qui vise à fournir des images des étoiles les plus anciennes et les plus froides de l'univers.

« À ma connaissance, affirme Wolfgang Dahmen, Meyer n'a jamais travaillé directement sur un problème d'application concret. » Les mathématiques de Meyer sont donc un bon exemple de la manière dont les recherches sur des questions mathématiques fondamentales aboutissent souvent à des résultats surprenants qui profitent à l'humanité.

**Bibliographie**


— « Meyer (2017) », dans *Les lauréats du prix Abel* (trad. N. Bacaër), 2024, p. 250-264.
— Allouche (Jean-Paul), « Yves Meyer et la théorie des nombres », *Gazette des mathématiciens*, 2011, nº 128, p. 34-38.
— Gratias (Denis) et Quiquandon (Marianne), « Cristallographie : les quasicristaux et Yves Meyer », 2023, HAL.
— Guihéneuf (Pierre-Antoine), « Yves Meyer et les quasi-cristaux », *Images des mathématiques*, 2017.
— Jaffard (Stéphane), « Yves Meyer, lauréat 2010 du prix Gauss », *Images des mathématiques*, 2010.
— Jaffard (Stéphane), « Remise du prix Abel 2017 à Yves Meyer », *Images des mathématiques*, 2017.
— Jaffard (Stéphane), « Yves Meyer, prix Abel 2017 », *Gazette des mathématiciens*, 2017, nº 153, p. 20-26.
— Jaffard (Stéphane) et Planchon (Fabrice), « Yves Meyer reçoit le prix Gauss à l'ICM », *Gazette des mathématiciens*, 2010, nº 126, p. 76-79.
— Meyer (Yves), *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Berlin, Springer, 1970.
— Meyer (Yves), *Ondelettes et opérateurs, t. I, Ondelettes*, Paris, Hermann, 1989.
— Meyer (Yves), *Ondelettes et opérateurs, t. II, Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Paris, Hermann, 1990.
— Meyer (Yves) et Coifman (R. R.), *Ondelettes et opérateurs, t. III, Opérateurs multilinéaires*, Paris, Hermann, 1991.
— Meyer (Yves), *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Paris, Hermann, 1992.
— Meyer (Yves), *Les Ondelettes : algorithmes et applications*, 2e éd.,

Paris, Armand Colin, 1993.
— Meyer (Yves), « Approximation par ondelettes et approximation non-linéaire », dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 1, 2e éd., Paris, Cassini, 2003, p. 193-222.
— Meyer (Yves), « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas », *Un texte, un mathématicien*, 2006.
— Pajot (Hervé), « Yves Meyer et l'opérateur de Cauchy », *Gazette des mathématiciens*, 2011, no 128, p. 15-33.

# Médaille Chern : Louis Nirenberg

> « pour son rôle dans la formulation de la théorie moderne des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires et pour avoir encadré de nombreux étudiants et postdoctorants dans ce domaine ».

**Présentation de R. Ramachandran**

Nirenberg est sans aucun doute l'un des analystes les plus remarquables du XX^e^ siècle. Ses travaux ont eu une influence majeure sur le développement de différents domaines des mathématiques et de leurs applications. En particulier, il a été à l'origine de la plupart des développements dans la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires et non linéaires et dans les domaines connexes de l'analyse, qui sont les outils mathématiques de base de la science moderne. Les EDP apparaissent en physique et en géométrie lorsque les systèmes dépendent simultanément de plusieurs variables et les plus intéressantes sont non linéaires. L'importance des EDP est évidente si l'on considère que sur les sept problèmes du millénaire de l'institut de mathématiques Clay, trois concernent les EDP ou y sont liés. Les travaux de Nirenberg sur les EDP sont profonds et fondamentaux. Il a développé des liens subtils entre l'analyse et la géométrie différentielle et les a appliqués à la dynamique des fluides et à d'autres phénomènes physiques.

La thèse de Nirenberg portait sur une question fondamentale en géométrie : la solution d'un problème de plongement en géométrie différentielle que Hermann Weyl avait posé vers 1916. Étant donné une métrique riemannienne sur la sphère unité, avec une courbure de Gauss strictement positive, peut-on plonger cette 2-sphère de manière isométrique dans l'espace de dimension 3 sous la forme d'une surface convexe ? La thèse elle-même était une fenêtre sur les principaux centres d'intérêt de Nirenberg : les EDP et en particulier les EDP elliptiques. En donnant une réponse positive à la question de Weyl, Nirenberg a utilisé les idées de Charles Morrey. Il a résolu le problème en le réduisant à un problème d'EDP non linéaire. Cette équation est également une EDP elliptique.[7]

7. Les EDP elliptiques ont des coefficients qui satisfont une inégalité. Elles ont des

Comme l'a souligné le mathématicien J. Mawhin dans son récent hommage à Nirenberg, l'ellipticité est un mot-clé dans l'œuvre mathématique de Nirenberg. Plus d'un tiers des articles de Nirenberg contiennent le mot « elliptique » rien que dans leur titre, et une part bien plus importante traite d'équations ou de systèmes elliptiques. « Il n'y a pratiquement aucun aspect de ces équations qu'il n'ait pas examiné », a-t-il déclaré. Malgré leur variété, les EDP elliptiques ont une théorie bien développée à laquelle Nirenberg a largement contribué. Au cours de sa première année de publication (1953), il a lui-même publié trois autres articles, dont deux portaient sur des EDP elliptiques non linéaires, sur lesquelles il est revenu par la suite.

Au cours des vingt années suivantes, avec plusieurs collaborateurs, il a développé la théorie des équations elliptiques qui vérifient certains critères de régularité qu'il avait formulés. Alors que les démonstrations de l'existence et de l'unicité des solutions faibles des problèmes elliptiques étaient bien connues, Nirenberg s'est penché sur la question beaucoup plus difficile de la régularité (ou du bon comportement) de la solution faible.[8] Aujourd'hui, la méthode des différences de Nirenberg pour démontrer la régularité à l'intérieur et aux bords de l'équation fait partie de l'apprentissage de tout étudiant dans le domaine des EDP.

Un point culminant de ses recherches dans ce domaine est l'extension, réalisée en collaboration avec Shmuel Agmon et Avron Douglis, sur les estimations *a priori* pour les systèmes elliptiques linéaires généraux. Il s'agit de l'un des résultats les plus cités dans le domaine de l'analyse. Comme l'a dit Nirenberg, l'objectif était d'obtenir « des estimations générales pour des systèmes généraux avec des conditions aux limites générales ». La citation du prix Steele pour l'ensemble de sa carrière, qui lui a été décerné par la Société mathématique américaine (1994), disait d'ailleurs : « Nirenberg est passé maître dans l'art et la science d'obtenir et d'appliquer des estimations *a priori* dans tous les domaines de l'analyse. »

Des questions essentielles sur la régularité des équations de Navier-Stokes, dont les solutions déterminent le mouvement des fluides, sont toujours ouvertes et constituent l'un des problèmes du millénaire de l'institut Clay. Parmi les meilleurs résultats actuels figure l'estimation

applications dans presque tous les domaines des mathématiques et en physique. Comme pour une EDP générale, une EDP elliptique peut avoir des coefficients non constants et être non linéaire. L'exemple de base d'une EDP elliptique est l'équation de Laplace.

8. Une solution faible à une EDP est une solution pour laquelle les dérivées apparaissant dans l'équation peuvent ne pas toutes exister, mais qui est néanmoins considérée comme satisfaisant l'équation dans un certain sens mathématique.

de Nirenberg-Caffarelli-Kohn de la mesure de l'ensemble des singularités. Nirenberg pense que le problème sera bientôt résolu, mais qu'il nécessitera davantage de contributions de la part de l'analyse harmonique.

En s'appuyant sur des estimations antérieures d'Alberto Calderón et d'Antoni Zygmund, Joseph Kohn et lui-même ont introduit le concept d'opérateur pseudo-différentiel, une généralisation de l'opérateur de dérivée partielle, qui est utile pour traiter la question de la régularité des solutions des problèmes aux limites elliptiques. Ils s'intéressaient à un problème qui impliquait des opérateurs intégraux singuliers (des opérateurs intégraux qui ne sont pas mathématiquement définis en un point) et ils avaient besoin d'informations sur certaines propriétés de ces opérateurs, mais celles-ci n'étaient pas disponibles dans la littérature. Ils ont donc développé ce dont ils avaient besoin et il en est résulté la notion extrêmement utile d'opérateur pseudo-différentiel. Cette notion a stimulé une énorme quantité de travaux ultérieurs dans ce domaine. Un autre travail important a été réalisé avec François Trèves sur la résolubilité des EDP linéaires générales. Ses recherches sur la régularité des problèmes à frontière libre avec David Kinderlehrer et Joel Spruck constituent d'autres points forts. Ces problèmes ont trouvé un large éventail d'applications, y compris pour la propagation des flammes.

Comme indiqué précédemment, Nirenberg s'est intéressé en pionnier des EDP non linéaires à plusieurs reprises aux équations complètement non linéaires et a réalisé des percées remarquables. Un exemple est la série d'articles sur l'existence de solutions lisses d'équations de type Monge-Ampère, qui sont des EDP non linéaires du second ordre avec des symétries spéciales, en collaboration avec Luis Caffarelli et Spruck. L'étude par Nirenberg des solutions symétriques d'équations elliptiques non linéaires avec des méthodes de plan mobile, en collaboration avec Basilis Gidas et Wei Ming Ni puis avec Henri Berestycki, est une application ingénieuse du principe du maximum. Mawhin a qualifié Nirenberg de « Paganini du principe du maximum ». Grâce aux idées et aux méthodes de Nirenberg, cette théorie est devenue magnifique et a donné lieu à des applications dans le domaine de la théorie de la combustion.

Les citations célèbres suivantes de Nirenberg sont révélatrices de son approche du traitement de la non-linéarité : le problème détermine la méthode. Dans sa conférence invitée au Congrès international des mathématiciens de Stockholm en 1962, il a déclaré : « La plupart des résultats pour les problèmes non linéaires sont encore obtenus via

des problèmes linéaires, en dépit du fait que les problèmes sont non linéaires et non pas à cause de cela. » Dans la même conférence, il a également déclaré, en commentant le résultat de quelqu'un : « Le caractère non linéaire de l'équation est utilisé de manière essentielle ; en effet, il obtient des résultats en raison de la non-linéarité et non en dépit de celle-ci. »

Le large éventail d'intérêts de Nirenberg comprenait également la géométrie différentielle et la topologie, domaines dans lesquels il a apporté des contributions significatives. En analyse harmonique, une fonction à oscillation moyenne bornée (BMO) est une fonction à valeur réelle dont l'oscillation moyenne est finie. Motivé par les travaux antérieurs de Fritz John sur l'élasticité, Nirenberg, en association avec John, a étudié pour la première fois la topologie de l'espace de ces fonctions et en a donné une définition précise. Cet espace est parfois appelé espace de John-Nirenberg. Les résultats ont été cruciaux pour les travaux ultérieurs de Charles Fefferman sur cet espace de fonctions. Cet espace de fonctions a ensuite été utilisé dans de nombreuses parties de l'analyse et dans la théorie des martingales. Plus récemment, motivé par certains problèmes non linéaires en physique, Nirenberg est revenu sur ce sujet. En collaboration avec Haïm Brezis, il a étudié l'espace VMO des fonctions d'oscillation moyenne évanescente. Ces fonctions sont continues et tendent vers 0 à l'infini ; elles forment un sous-espace de l'espace BMO. Nirenberg et Brezis ont étendu la « théorie du degré » en topologie aux applications qui appartiennent à l'espace VMO, un résultat qui a surpris les topologues.

Une question fondamentale dans l'étude des variétés complexes est la suivante : quand une structure presque complexe est-elle donnée par une structure complexe ? Une variété est un espace topologique qui peut être décrit localement en termes d'espaces plus simples et bien compris tels que l'espace euclidien. Pour qu'une variété soit une variété complexe (où les opérations avec les nombres imaginaires peuvent être définies), l'existence d'une structure presque complexe est nécessaire, mais pas suffisante.[9] En d'autres termes, toute variété complexe est une variété presque complexe, mais pas l'inverse.

En 1957, Nirenberg et son étudiant August Newlander ont démontré un résultat fondamental qui répondait à une question ouverte depuis de nombreuses années. Selon Nirenberg, André Weil et Shiing-Shen

9. Une variété presque complexe est une variété lisse munie d'une structure qui, *grosso modo*, définit des opérations avec les nombres imaginaires sur chaque espace tangent, la variété différentielle attachée à chaque point.

Chern avaient attiré son attention sur le problème de la démonstration de la condition d'intégrabilité pour les structures presque complexes. La résolution de ce problème a ouvert la voie à son utilisation dans l'étude de nombreux aspects des variétés complexes, en particulier la théorie des déformations. Bien que le problème soit linéaire, la démonstration de Newlander et Nirenberg le réduit à un système d'EDP non linéaires, de sorte que chaque équation implique des dérivées par rapport à une seule variable complexe. L'immense perspicacité de Nirenberg en ce qui concerne les propriétés des EDP et sa capacité unique à relier les EDP, l'analyse et la géométrie se retrouvent dans tous ces travaux.

Les inégalités ont eu un attrait particulier pour Nirenberg et plusieurs inégalités importantes sont associées à son nom. Les inégalités de Gagliardo-Nirenberg constituent un résultat très important. La citation de la Société mathématique américaine l'a qualifié de « joyau mineur ». L'amour de Nirenberg pour les inégalités vient de sa longue association avec Kurt Friedrichs à l'institut Courant pour les sciences mathématiques de l'université de New York, où Nirenberg a terminé ses études après avoir obtenu ses licences de physique et de mathématiques à l'université McGill en 1945. Bien qu'il ait voulu faire de la physique grâce à un excellent professeur de physique à McGill, il a d'abord fait des mathématiques sur les conseils de Richard Courant. Nirenberg a déclaré que Friedrichs avait exercé une influence majeure sur lui et que son point de vue sur les mathématiques avait largement influencé le sien.

« Friedrichs était un grand amateur d'inégalités et cela m'a beaucoup marqué. Son point de vue était que les inégalités sont plus intéressantes que les égalités, les identités », a déclaré Nirenberg dans un entretien accordé à la Société mathématique américaine. Il a par ailleurs déclaré : « J'aime les inégalités. Donc, si quelqu'un me montre une nouvelle inégalité, je dis : Oh ! c'est magnifique, laissez-moi y réfléchir. » Bien qu'il ait voulu faire son doctorat sous la direction de Friedrichs, il a fini par le faire sous celle de Jim Stoker et l'a terminé en 1949. Mais l'influence de Friedrichs est clairement visible dans le choix des problèmes traités par Nirenberg, qui sont souvent tirés de la physique. Il ne fait pas de distinction entre les mathématiques « pures » et « appliquées », une attitude qui résulte du fait que toute sa carrière s'est déroulée à l'institut Courant, « où il n'y a que des mathématiques et où les gens s'intéressent aux problèmes purs et appliqués », un héritage de Courant et Friedrichs. Bien que Nirenberg ait déclaré qu'il était plus un résolveur de problèmes qu'un développeur de théories, son approche des problèmes a abouti à

la formulation de théories dans différents domaines des mathématiques.

Nirenberg est reconnu pour ses excellentes conférences et ses exposés lucides. Il a publié plus de 185 articles et a eu 46 étudiants et 245 descendants selon le Projet de généalogie mathématique. Au cours de chacune des dix dernières années, les quinze articles les plus cités en mathématiques comprenaient au moins deux articles de Nirenberg, selon MathSciNet. Le fait que près de 90 % des articles de Nirenberg aient été rédigés en collaboration montre que, pendant plus de six décennies, Nirenberg a partagé ses connaissances et sa vision des mathématiques avec des mathématiciens du monde entier. Il est également connu pour sa grande générosité et présente avec enthousiasme les résultats d'autres mathématiciens dans ses conférences et ses études.

Kohn a dit ceci de lui : « La carrière de Nirenberg a été une source d'inspiration ; ses nombreux étudiants, collaborateurs et collègues ont beaucoup appris de lui. Outre les mathématiques, Nirenberg nous a enseigné le plaisir des voyages, du cinéma et de la gastronomie. Pour apprécier Nirenberg, il faut également tenir compte de son sens de l'humour omniprésent. Son humour est irrépressible, si bien que de temps en temps, il se retrouve sur la page imprimée. »

Dans son entretien avec la Société mathématique américaine, Nirenberg a déclaré : « J'ai écrit un article avec Philip Hartman qui était élémentaire mais très amusant à faire. C'est ce que j'essaie de faire comprendre aux gens qui ne connaissent rien aux mathématiques, à quel point c'est amusant ! L'une des merveilles des mathématiques est que vous allez quelque part dans le monde et vous rencontrez d'autres mathématiciens, et c'est comme une grande famille. Cette grande famille est une joie merveilleuse. »

**Bibliographie**

— Mawhin (Jean), « Éloge de Louis Nirenberg, membre associé de la Classe des Sciences », *La Thérésienne, Revue de l'Académie royale de Belgique*, 2022, nº 1, p. 1-7.

# Prix Nevanlinna : Daniel Spielman

> « pour l'analyse lisse de la programmation linéaire, des algorithmes pour les codes basés sur les graphes et des applications de la théorie des graphes pour le calcul numérique ».

**Présentation (par R. Ramachandran)**

La programmation linéaire est l'un des outils les plus utiles des mathématiques appliquées. Il s'agit essentiellement d'une technique d'optimisation d'une fonction « coût » soumise à des contraintes d'égalités et d'inégalités qui sont linéaires. L'algorithme [10] le plus ancien pour la programmation linéaire est peut-être l'algorithme du simplexe. Il a été conçu par George Dantzig en 1947 et est encore aujourd'hui extrêmement populaire pour la résolution numérique des problèmes de programmation linéaire. En termes géométriques, les contraintes définissent un polyèdre convexe dans un espace de grande dimension. L'algorithme du simplexe atteint l'optimum en se déplaçant de sommet à sommet voisin du polyèdre.

La méthode fonctionne très bien en pratique même si, dans le pire des cas (pour des exemples construits artificiellement), l'algorithme prend un temps de calcul exponentiel. Ainsi, la compréhension de la complexité de la programmation linéaire et celle de l'algorithme du simplexe ont été des problèmes majeurs en informatique. Les mathématiciens ont été déconcertés par l'efficacité générale de la méthode du simplexe dans la pratique et ont longtemps essayé d'en faire un théorème mathématique. Si l'analyse de la complexité dans le pire des cas est un outil efficace pour étudier la difficulté d'un problème, elle ne l'est pas pour étudier les performances pratiques d'un algorithme. Une alternative est l'analyse de la complexité en moyenne, où la performance est moyennée sur toutes les exemples d'une taille donnée. Mais les exemples réels qui surviennent dans la pratique peuvent ne pas être les mêmes que les exemples du cas moyen. L'analyse en moyenne n'est donc pas toujours appropriée.

10. Un algorithme est une suite finie d'instructions pour résoudre un problème informatique ; c'est comme un programme d'ordinateur.

En 1979, L. G. Kachian a démontré que la programmation linéaire est dans la classe P, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme en temps polynomial pour la programmation linéaire, ce qui a conduit à la découverte d'algorithmes polynomiaux pour de nombreux problèmes d'optimisation. La croyance générale était alors qu'il existait un véritable compromis entre la qualité de la théorie et celle de la pratique, et que ces deux aspects ne pouvaient pas coexister pour la programmation linéaire. Cependant, la méthode des points intérieurs de Narendra Karmarkar en 1984 et ses variantes ultérieures, dont la complexité est polynomiale, ont mis fin à cette croyance. Les méthodes de points intérieurs construisent une suite de points admissibles, qui se trouvent à l'intérieur du polyèdre mais jamais sur son bord (contrairement à la trajectoire de sommet à sommet de l'algorithme du simplexe), qui converge vers la solution. L'algorithme de Karmarkar et les découvertes théoriques et pratiques ultérieures sont compétitifs avec la méthode du simplexe, et parfois même supérieurs.

Malgré ces développements, la méthode du simplexe reste la méthode la plus populaire pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Il n'y avait pas d'explication satisfaisante pour son excellente performance jusqu'à ce que le magnifique concept d'analyse lisse introduit par Spielman et Shang-Hua Teng leur permette de démontrer un théorème mathématique.

L'analyse lisse fournit une analyse plus réaliste des performances pratiques de l'algorithme que l'utilisation des scénarios les plus défavorables ou des scénarios moyens. L'analyse lisse est un hybride de l'analyse du pire des cas et de l'analyse moyenne, qui hérite des avantages des deux. « La démonstration de Spielman et Teng est un véritable tour de force », selon Gil Kalai, professeur de mathématiques à l'université hébraïque de Jérusalem et professeur de mathématiques et d'informatique à temps partiel à l'université Yale.

La « complexité lisse » d'un algorithme est donnée par la performance de l'algorithme lorsque les données d'entrée les plus défavorables subissent de légères perturbations aléatoires. Si la complexité lisse est faible, l'algorithme du simplexe, par exemple, devrait donner de bons résultats dans les cas pratiques où les données d'entrée sont soumises à du bruit et à des perturbations. En d'autres termes, s'il existe des exemples pathologiques où la méthode échoue, de légères modifications de tout exemple pathologique produisent un problème « lisse » pour lequel la méthode du simplexe fonctionne très bien. « Grâce à l'analyse lisse, les théoriciens peuvent trouver des moyens d'apprécier les

heuristiques qu'ils avaient auparavant rejetées. En outre, nous espérons que l'analyse lisse pourra inspirer la conception d'algorithmes efficaces qui auraient pu être rejetés en raison de leur complexité médiocre dans le pire des cas », a déclaré Spielman.

L'*Association for Computing Machinery* (ACM) et l'Association européenne d'informatique théorique ont décerné le prix Gödel 2008 à Spielman et Teng pour le développement de cet outil. L'article de Spielman et Teng intitulé « Analyse lisse des algorithmes : pourquoi l'algorithme du simplexe prend généralement un temps polynomial » publié dans le journal de l'ACM a également été l'un des trois lauréats du prix Fulkerson 2009 décerné conjointement par la Société mathématique américaine et la Société de programmation mathématique.

Depuis son introduction en 2001, l'analyse lisse a servi de base à de nombreuses recherches, pour des problèmes allant de l'optimisation à l'analyse numérique, en passant par l'apprentissage automatique et l'exploration de données. « Cependant, écrit Spielman, nous ne savons toujours pas si l'analyse lisse, la plus ambitieuse et la plus théorique de mes analyses, conduira à des améliorations dans la pratique. »

Une deuxième contribution majeure de Spielman concerne le codage. La plupart des communications actuelles utilisent le codage, soit pour préserver le secret, soit pour garantir une communication sans erreur. Les codes correcteurs d'erreur sont les moyens par lesquels les interférences dans la communication sont compensées. Les codes correcteurs jouent un rôle important dans la technologie moderne, depuis les communications par satellite jusqu'aux mémoires d'ordinateur. Dans les codes correcteurs, il est possible de récupérer le message correct à la réception, même si un certain nombre de *bits* du message ont été corrompus, à condition que ce nombre soit inférieur à un seuil. Les travaux de Spielman ont visé à mettre au point des codes qui peuvent être encodés et décodés rapidement et qui permettent de communiquer à des taux proches de la capacité du canal de communication.

En théorie de l'information, un code de parité à faible densité est un code linéaire correcteur d'erreur, qui corrige les données bloc par bloc et permet la transmission de messages sur un canal buité. Ces codes sont construits à l'aide d'une certaine classe de graphes creux (à faible densité), où le nombre d'arêtes est bien inférieur au nombre possible d'arêtes. Il s'agit de codes qui approchent la capacité, ce qui signifie qu'il existe des constructions pratiques qui permettent de fixer le seuil de bruit très près de la limite de ce qui est théoriquement possible. En utilisant certaines techniques itératives, les codes LDPC peuvent être

décodés en un temps linéaire par rapport à la longueur de leurs blocs.

Une technique importante pour rendre le codage et le décodage efficaces est basée sur des graphes extrêmement bien connectés, mais creux, appelés « graphes expanseurs ». C'est cette caractéristique contre-intuitive et apparemment contradictoire des graphes expanseurs, à savoir qu'ils sont creux et pourtant très connectés, qui rend les graphes expanseurs très utiles, souligne Peter Sarnak, professeur de mathématiques à l'université de Princeton. Spielman et ses coauteurs ont effectué un travail fondamental en utilisant ces méthodes de la théorie des graphes et ont conçu des méthodes de codage et de décodage très efficaces.

L'article le plus célèbre de Spielman dans ce domaine s'intitule « Amélioration des codes de parité à faible densité en utilisant des graphes irréguliers ». Il a partagé le prix 2002 de la Société de théorie de l'information. Contrairement au cas des graphes irréguliers, chaque sommet d'un graphe régulier a le même nombre de voisins. L'article démontrait que les codes de parité à faible densité irréguliers pouvaient donner de bien meilleurs résultats que les codes plus courants qui utilisent des graphes réguliers pour le canal avec un bruit additif blanc gaussien.

C'était une extension des travaux antérieurs sur les « codes d'effacement efficaces » de Spielman et d'autres, qui ont introduit des codes de parité à faible densité irréguliers et démontré qu'ils pouvaient approcher la capacité de ce que l'on appelle le canal binaire d'effacement. Ces codes apportent donc une solution efficace à des problèmes tels que la perte de paquets sur Internet et sont particulièrement utiles dans les communications avec multidiffusion. Ils constituent également l'une des techniques de codage les plus connues pour minimiser la consommation d'énergie nécessaire à une communication fiable en présence d'un bruit blanc gaussien. Les codes de parité à faible densité irréguliers ont eu de nombreuses autres applications, notamment la récente norme DVB-S2, une norme de transmission du contenu multimédia par satellite.

Spielman a déposé cinq demandes de brevet pour les codes correcteurs d'erreur qu'il a inventés. Quatre d'entre elles ont déjà été accordées par l'Office américain des brevets.

Le calcul scientifique combinatoire est le nom donné au domaine interdisciplinaire dans lequel on applique la théorie des graphes et les algorithmes combinatoires à des problèmes de calcul scientifique et d'ingénierie. Spielman s'est récemment intéressé à l'un des pro-

blèmes les plus fondamentaux du calcul scientifique : la résolution d'un système d'équations linéaires, qui est au cœur des applications scientifiques, de l'ingénierie, de la programmation mathématique et de l'apprentissage automatique. Il a trouvé des algorithmes remarquables en temps linéaire basés sur le partitionnement de graphes pour plusieurs classes importantes de systèmes linéaires. Cela a conduit à des avancées théoriques considérables ainsi qu'à de bons algorithmes pratiques.

« La belle interface entre la théorie et la pratique, que ce soit pour l'optimisation, les codes correcteurs d'erreur, la recherche de « sparsifieurs » qui atteignent la limite dite de Ramanujan, l'analyse des algorithmes, la théorie de la complexité ou l'analyse numérique, est caractéristique du travail de Dan Spielman », dit Kalai.

**Bibliographie**

— Ghys (Étienne), « Des événements rares, *Images des mathématiques*, 2010.

# Prix Līlāvatī : Simon Singh

Simon Lehna Singh, le célèbre physicien devenu auteur, journaliste et producteur de télévision britannique, spécialisé dans la vulgarisation des sujets mathématiques et scientifiques, a été choisi pour le prix Līlāvatī, institué pour récompenser les contributions exceptionnelles d'une personne à la sensibilisation du public aux mathématiques.

Ce nouveau prix international sera décerné lors du prochain congrès international des mathématiciens, qui se tiendra à Hyderabad en Inde du 19 au 27 août 2010. Ce congrès est le plus important rassemblement international de mathématiciens. Il est organisé tous les quatre ans par l'Union mathématique internationale (UMI).

Le prix est assorti d'une citation et d'une récompense d'un million de roupies indiennes (environ 20 000 euros), qui sera remise à Singh lors de la cérémonie de clôture du congrès le 27 août.

La sélection du lauréat a été effectuée par un comité de cinq éminents mathématiciens présidé par M. S. Narasimhan (d'Inde). Les autres membres du comité étaient László Lovász (de Hongrie, président de l'UMI), John Ball (du Royaume-Uni, ancien président de l'UMI), Jacob Palis (du Brésil, ancien président de l'UMI) et M. S. Raghunathan (d'Inde). M. S. Raghunathan est également le président du comité exécutif d'organisation du congrès.

Singh est né le 1er janvier 1964 de parents indiens qui ont émigré au Royaume-Uni en 1950 depuis l'État du Pendjab en Inde. Il a grandi à Wellington, dans le Somerset, où il a fait ses études. Il a étudié la physique au Collège impérial de Londres, puis a obtenu un doctorat en physique des particules en travaillant au collège Emmanuel de l'université de Cambridge ainsi qu'au CERN à Genève.

En 1990, il a rejoint le département « Science et reportages » de la télévision publique britannique. Il a réalisé en 1996 le documentaire *Le dernier théorème de Fermat*, qui a été primé. Ce documentaire fait suite à la solution très remarquée apportée par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1995 à l'un des problèmes mathématiques les plus difficiles au monde, à savoir la démonstration de la célèbre conjecture émise par le mathématicien français Pierre de Fermat en 1637. Cette exploration documentaire du célèbre problème a également constitué le sujet du premier livre de Singh, également intitulé *Le dernier théorème de Fermat* (1997). Il s'agit peut-être du premier livre de vulgarisation

mathématique à être devenu un succès de librairie.

Parmi ses autres ouvrages de vulgarisation mathématique, citons *Histoire des codes secrets* (1999), qui était son deuxième livre. Cette fois, le livre a donné lieu à une série télévisée intitulée *La science du secret*. Il a également produit une trilogie de feuilletons pour la radio sur les nombres. Le premier, intitulé *Cinq nombres* (2002), est un regard décalé sur les cinq nombres les plus importants en mathématiques : 0, $\pi$, le nombre d'or, la racine carrée de $-1$ (l'unité imaginaire i) et l'infini. Le deuxième, intitulé *Cinq autres nombres* (2003), s'intéresse à cinq nombres qui se trouvent au cœur de certains des problèmes les plus délicats des mathématiques. Le troisième, *Encore cinq autres nombres* (2005), s'intéresse à l'histoire, à l'utilisation et aux particularités de cinq nombres spéciaux.

Singh a déjà reçu les distinctions suivantes :

— membre de l'Ordre de l'Empire britannique en 2003 ;
— docteur ès lettres *honoris causa* de l'université de Loughborough en 2003 ;
— diplôme honorifique en mathématiques de l'université de Southampton en 2005 ;
— docteur en design de l'université de l'Ouest de l'Angleterre en 2006 ;
— médaille Kelvin de l'Institut de physique en 2008 ;
— docteur ès sciences *honoris causa* du collège *Royal Holloway* de l'université de Londres en 2008.

Le prix Līlāvatī tire son nom du traité mathématique du XIIe siècle intitulé *Līlāvatī*, consacré à l'arithmétique et à l'algèbre, écrit par le mathématicien indien Bhāskara II, également connu sous le nom de Bhāskarācārya. Dans ce livre, l'auteur pose en vers une série de problèmes d'arithmétique élémentaire à une certaine Līlāvatī (peut-être s'agissait-il de sa fille) et les fait suivre d'indications de solutions.

Cet ouvrage semble avoir été la principale source pour l'apprentissage de l'arithmétique et de l'algèbre dans l'Inde médiévale. L'ouvrage a également été traduit en persan et a exercé une influence en Asie occidentale.

Bien que le prix ait été institué en tant que récompense unique par le comité d'organisation du congrès de 2010, le comité s'efforce d'en faire une caractéristique régulière des congrès internationaux de mathématiciens à venir.

**Bibliographie**

— Singh (Simon), *Le dernier théorème de Fermat* (trad. G. Messadié), Paris, J.-C. Lattès, 1999.
— Singh (Simon), *Histoire des codes secrets* (trad. C. Coqueret), Paris, J.-C. Lattès, 1999.
— Singh (Simon), *Le roman du Big Bang* (trad. P. Babo et D. Griesmar), Paris, J.-C. Lattès, 2005.
— Singh (Simon), *Les mathématiques des Simpson* (trad. É. Busser), Paris, Éditions SW Télémaque, 2015.

# Le congrès de 2014

# Médaille Fields : Artur Avila

> « pour ses contributions profondes à la théorie des systèmes dynamiques, qui ont changé le visage du domaine, en utilisant l'idée puissante de la renormalisation comme principe unificateur ».

Artur Avila a apporté des contributions remarquables à la théorie des systèmes dynamiques, à l'analyse et à d'autres domaines, en démontrant dans de nombreux cas des résultats décisifs qui ont permis de résoudre des problèmes ouverts anciens. Originaire du Brésil, il passe une partie de son temps dans ce pays et l'autre en France, ce qui lui permet de combiner les fortes cultures et traditions mathématiques des deux pays. La quasi-totalité de ses travaux a été réalisée en collaboration avec une trentaine de mathématiciens du monde entier. Avila apporte à ces collaborations une formidable puissance technique, l'ingéniosité et la ténacité d'un maître de la résolution de problèmes, ainsi qu'un sens infaillible des questions profondes et significatives.

Les résultats obtenus par Avila couvrent un large éventail de sujets. Nous nous concentrons ici sur quelques points saillants. L'un de ses premiers résultats significatifs clôt un chapitre d'une longue histoire qui a commencé dans les années 1970. À cette époque, des physiciens tels que Mitchell Feigenbaum ont commencé à essayer de comprendre comment le chaos peut apparaître dans des systèmes très simples. Certains des systèmes qu'ils ont étudiés étaient basés sur l'itération d'une formule mathématique telle que $3x(1-x)$. À partir d'un point donné, on peut observer la trajectoire de ce point en cas d'applications répétées de la formule. On peut considérer que la formule déplace le point de départ au fil du temps. Pour certaines fonctions, les trajectoires finissent par se stabiliser sur des orbites stables, tandis que pour d'autres applications les trajectoires deviennent chaotiques.

La volonté de comprendre ces phénomènes a donné naissance à la théorie des systèmes dynamiques discrets, à laquelle de nombreux mathématiciens ont contribué au cours des décennies suivantes. L'un des principaux objectifs était de trouver des moyens de prédire le comportement à long terme. Pour une trajectoire qui s'installe sur une orbite stable, il est facile de prédire où un point se déplacera. Mais ce n'est pas le cas pour une trajectoire chaotique : essayer de

prédire exactement où ira un point initial après une longue période de temps revient à essayer de prédire, après un million de lancers d'une pièce de monnaie, si le lancer suivant sera pile ou face. Mais on peut modéliser le jeu de pile ou face de manière probabiliste, en utilisant des outils stochastiques. On peut essayer de faire la même chose pour les trajectoires. Les mathématiciens ont remarqué que de nombreuses applications qu'ils étudiaient entraient dans l'une des deux catégories suivantes : « régulières » (les trajectoires finissent par devenir stables) ou « stochastiques » (les trajectoires présentent un comportement chaotique qui peut être modélisé de manière stochastique). Cette dichotomie entre régularité et stochasticité a été démontrée dans de nombreux cas particuliers et l'on espérait qu'une compréhension plus complète finirait par émerger. Cet espoir s'est concrétisé dans un article publié en 2003 par Avila, Welington de Melo et Mikhail Lyubich, qui a mis un terme à cette longue ligne de recherche. Avila et ses coauteurs ont examiné une vaste catégorie de systèmes dynamiques, à savoir ceux associés à des applications de forme parabolique connues sous le nom d'applications unimodales. Ils ont démontré que si l'on choisit une telle application au hasard, alors l'application sera soit régulière, soit stochastique. Leur travail fournit une image unifiée et complète du comportement de ces systèmes.

Un autre résultat remarquable d'Avila est celui avec Giovanni Forni sur le mélange faible. Si l'on tente de mélanger un jeu de cartes en se contentant de le couper, c'est-à-dire en prenant une petite pile sur le dessus du jeu et en la plaçant en dessous, le jeu ne sera pas vraiment mélangé. Les cartes sont simplement déplacées de manière cyclique. Mais si l'on mélange les cartes de la manière habituelle en les intercalant, de sorte que la première carte vienne par exemple après la troisième, la deuxième après la cinquième et ainsi de suite, le jeu sera véritablement mélangé. C'est l'idée essentielle de la notion abstraite de mélange qu'Avila et Forni ont envisagée. Le système avec lequel ils ont travaillé n'est pas un jeu de cartes, mais plutôt un intervalle fermé qui est découpé en plusieurs sous-intervalles. Par exemple, l'intervalle peut être découpé en quatre parties ABCD, puis on définit une application sur l'intervalle en échangeant les positions des sous-intervalles de manière à ce que ABCD devienne par exemple DCBA. En itérant l'application, on obtient un système dynamique appelé « échange d'intervalles ».

Si l'on considère le parallèle avec le fait de couper ou de mélanger un jeu de cartes, on peut se demander si un échange d'intervalles peut réellement mélanger les sous-intervalles. On sait depuis longtemps que

c'est impossible. Il existe cependant des moyens de quantifier le degré de mélange qui conduisent à la notion de « mélange faible », qui décrit un système qui échoue de justesse à être véritablement mélangé. Avila et Forni ont montré que presque tous les échanges d'intervalles sont faiblement mélangeants. En d'autres termes, si l'on choisit au hasard un échange d'intervalles, il est très probable qu'il produira par itération un système dynamique qui est faiblement mélangeant. Ce travail est lié à des travaux plus récents d'Avila et de Vincent Delecroix, qui étudient le mélange dans les billards polygonaux réguliers. Les billards sont utilisés en physique statistique comme modèles du mouvement des particules. Avila et Delecroix ont constaté que presque tous les systèmes dynamiques qui apparaissent dans ce contexte sont faiblement mélangeants.

Dans les deux axes de travail mentionnés ci-dessus, Avila a mis à profit ses connaissances approfondies dans le domaine de l'analyse pour aborder des questions relatives aux systèmes dynamiques. Il a aussi parfois fait l'inverse, en appliquant les approches des systèmes dynamiques à des questions d'analyse. Un exemple est son travail sur les opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques. Il s'agit d'équations mathématiques qui permettent de modéliser des systèmes quantiques. L'une des images emblématiques de ce domaine est le papillon de Hofstadter, un motif fractal nommé d'après Douglas Hofstadter, qui l'a découvert pour la première fois en 1976. Le papillon de Hofstadter représente le spectre d'énergie d'un électron qui se déplace dans un champ magnétique extrême. Les physiciens ont été stupéfaits de constater que pour certaines valeurs des paramètres de l'équation de Schrödinger, ce spectre d'énergie semblait être l'ensemble de Cantor, un objet mathématique remarquable qui incarne les propriétés apparemment incompatibles de la densité et de la rareté. Dans les années quatre-vingt, le mathématicien Barry Simon a popularisé le « problème des dix martinis » (ainsi nommé par Mark Kac, qui a proposé d'acheter dix martinis à quiconque parviendrait à le résoudre). Ce problème demandait si le spectre d'un opérateur de Schrödinger particulier connu sous le nom d'opérateur presque-Mathieu était bien l'ensemble de Cantor. Avec Svetlana Jitomirskaya, Avila a résolu ce problème.

Aussi spectaculaire que soit cette solution, elle ne représente que la partie émergée de l'iceberg des travaux d'Avila sur les opérateurs de Schrödinger. À partir de 2004, il a passé de nombreuses années à développer une théorie générale qui a abouti à deux prépublications en 2009. Ces travaux établissent que, contrairement au cas particulier de

l'opérateur presque-Mathieu, les opérateurs de Schrödinger généraux ne présentent pas de comportement critique lors de la transition entre différents régimes de potentiel. Avila a utilisé des approches de la théorie des systèmes dynamiques dans ce travail, y compris des techniques de renormalisation.

Un dernier exemple du travail d'Avila est un résultat très récent qui découle de sa démonstration d'un théorème de régularisation pour les applications qui préservent le volume. Cette démonstration a permis de résoudre une conjecture ouverte depuis trente ans ; les mathématiciens espéraient que la conjecture était vraie, mais ne parvenaient pas à la démontrer. La démonstration d'Avila a débloqué tout un champ de recherche sur les systèmes dynamiques lisses et a déjà porté ses fruits. En particulier, le théorème de régularisation est un élément clé d'une avancée importante réalisée récemment par Avila, Sylvain Crovisier et Amie Wilkinson. Leur travail, qui est encore en préparation, montre qu'un difféomorphisme générique qui préserve le volume avec une entropie métrique strictement positive est un système dynamique ergodique.

Avec sa combinaison caractéristique d'une formidable puissance analytique et d'une profonde intuition des systèmes dynamiques, Artur Avila restera certainement un chef de file dans le domaine des mathématiques pendant de nombreuses années.

Né au Brésil en 1979, Artur Avila a également été naturalisé français. Il a obtenu son doctorat en 2001 à l'Institut national de mathématiques pures et appliquées (IMPA) à Rio de Janeiro, avec Welington de Melo comme directeur de thèse. Depuis 2003, il est chercheur au Centre national de la recherche scientifique (CNRS). Il est devenu directeur de recherche en 2008. Il est rattaché à l'IMPA au Brésil, au CNRS, à l'institut de mathématiques de Jussieu-Paris-Rive-Gauche et à l'université Paris-Diderot. Il a notamment reçu le prix Salem (2006), le prix de la Société mathématique européenne (2008), le grand prix Jacques-Herbrand de l'Académie des sciences (2009), le prix Brin (2011), le prix de la Société mathématique brésilienne (2013) et le prix TWAS en mathématiques de l'Académie mondiale des sciences (2013).

**Bibliographie**

— « Entretien avec Artur Avila », *Gazette des mathématiciens*, 2015, nº 143, p. 28-33.

— Ghys (Étienne), « Artur Avila, médaille Fields 2014 », *Images des mathématiques*, 2015.
— Hubert (P.) et Krikorian (R.), « Artur Avila, un génie carioca à Paris », *Gazette des mathématiciens*, n° 142, p. 55-69.

# Médaille Fields : Manjul Bhargava

> « pour avoir développé de nouvelles méthodes puissantes en géométrie des nombres, qu'il a appliquées au comptage des anneaux de petit rang et pour borner le rang moyen de courbes elliptiques ».

Les travaux de Manjul Bhargava dans le domaine de la théorie des nombres ont eu une influence profonde. Mathématicien d'une créativité extraordinaire, il a un goût prononcé pour les problèmes simples d'une beauté intemporelle, qu'il a résolus en développant de nouvelles méthodes élégantes et puissantes qui offrent des perspectives profondes.

Lorsqu'il était étudiant de troisième cycle, Bhargava a lu les monumentales *Disquisitiones arithmeticae*, un livre sur la théorie des nombres écrit par Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Tous les mathématiciens connaissent les *Disquisitiones*, mais peu d'entre eux les ont lues, car leurs notations et leur nature calculatoire les rendent difficiles à suivre pour les lecteurs modernes. Bhargava a néanmoins trouvé dans ce livre une source d'inspiration. Gauss s'intéressait aux formes quadratiques binaires, qui sont des polynômes $ax^2 + bxy + cy^2$, où $a$, $b$ et $c$ sont des entiers. Dans les *Disquisitiones*, Gauss a développé son ingénieuse loi de composition, qui donne une méthode pour composer deux formes quadratiques binaires afin d'en obtenir une troisième. Cette loi est devenue et reste un outil central de la théorie algébrique des nombres. Après avoir parcouru les vingt pages de calculs de Gauss qui aboutissent à la loi de composition, Bhargava savait qu'il devait y avoir une meilleure méthode.

Un jour, alors qu'il jouait avec un cube de Rubik, il a trouvé cette méthode. Bhargava a pensé à étiqueter chaque coin d'un cube avec un nombre, puis à couper le cube pour obtenir deux ensembles de quatre nombres. Chaque ensemble de quatre nombres forme naturellement une matrice. Un simple calcul avec ces matrices donne une forme quadratique binaire. Les trois façons de découper le cube donnent trois formes quadratiques binaires. Bhargava a ensuite calculé les discriminants de ces trois formes. Le discriminant, que certains connaissent comme l'expression « sous le signe racine carrée » dans la formule pour les équations du second degré, est une quantité fondamentale associée

à un polynôme. Lorsqu'il a constaté que les discriminants étaient tous identiques, comme dans la loi de composition de Gauss, Bhargava a compris qu'il avait trouvé un moyen simple et visuel d'obtenir la loi.

Il s'est également rendu compte qu'il pouvait étendre sa technique d'étiquetage des cubes à d'autres polynômes de degré supérieur (le degré est la puissance la plus élevée qui apparaît dans le polynôme ; par exemple, $x^3 - x + 1$ a un degré égal à 3). Il a ensuite découvert treize nouvelles lois de composition pour les polynômes de degré supérieur. Jusque-là, les mathématiciens considéraient la loi de composition de Gauss comme une curiosité qui ne se produisait qu'avec les formes quadratiques binaires. Jusqu'aux travaux de Bhargava, personne n'avait réalisé qu'il existait d'autres lois de composition pour les polynômes de degré supérieur.

L'une des raisons pour lesquelles la loi de composition de Gauss est si importante est qu'elle fournit des informations sur les corps quadratiques. On construit un corps de nombres en ajoutant aux nombres rationnels les racines non rationnelles d'un polynôme. Si le polynôme est du second degré, on obtient un corps quadratique. Le degré du polynôme et son discriminant sont deux quantités de base associées au corps de nombres. Bien que les corps de nombres soient des objets fondamentaux de la théorie algébrique des nombres, certains faits de base sont encore inconnus, comme le nombre de corps de nombres pour un degré et un discriminant fixés. Avec ses nouvelles lois de composition en main, Bhargava a entrepris de les utiliser pour étudier les corps de nombres.

Le travail de Gauss repose implicitement sur une technique appelée « géométrie des nombres ». Cette technique a été développée plus en détail dans un ouvrage de référence publié en 1896 par Hermann Minkowski (1864-1909). En géométrie des nombres, on imagine que le plan ou l'espace tridimensionnel est peuplé d'un réseau qui met en évidence les points dont les coordonnées sont entières. Si l'on dispose d'un polynôme du second degré, le comptage du nombre de points entiers du réseau dans une certaine région de l'espace tridimensionnel fournit des informations sur le corps quadratique associé. En particulier, on peut utiliser la géométrie des nombres pour montrer que, pour un discriminant dont la valeur absolue est inférieure à X, il existe environ X corps quadratiques. Dans les années 1960, une approche plus fine de la géométrie des nombres due à Harold Davenport (1907-1969) et Hans Heilbronn (1908-1975) a permis de résoudre le cas des corps de nombres de degré 3. Puis les progrès se sont arrêtés. Les travaux de

Bhargava, qui a compté le nombre de corps de degrés 4 et 5 ayant un discriminant borné, ont donc suscité beaucoup d'enthousiasme. Ces résultats utilisent ses nouvelles lois de composition ainsi que son développement systématique de la géométrie des nombres, qui a considérablement étendu la portée et la puissance de cette technique. Les cas des degrés supérieurs à 5 restent ouverts et les lois de composition de Bhargava ne les résoudront pas. Cependant, il est possible que ces cas puissent être attaqués en utilisant des analogues de ses lois de composition.

Récemment, Bhargava et ses collaborateurs ont utilisé son extension de la géométrie des nombres pour obtenir des résultats étonnants sur les courbes hyperelliptiques. Au cœur de ce domaine de recherche se trouve l'ancienne question de savoir quand un calcul arithmétique donne un nombre qui est un carré. L'une des réponses trouvées par Bhargava est étonnamment simple à énoncer : un polynôme typique de degré au moins 5 avec des coefficients rationnels ne prend jamais une valeur qui est un carré. Une courbe hyperelliptique est le graphe d'une équation de la forme $y^2$ = un polynôme à coefficients rationnels. Dans le cas où le polynôme est de degré 3, le graphe est une courbe elliptique. Les courbes elliptiques ont des propriétés particulièrement attrayantes et ont fait l'objet de nombreuses recherches. Elles ont également joué un rôle important dans la célèbre démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles.

Une question clé concernant une courbe hyperelliptique est de savoir comment on peut compter le nombre de points qui ont des coordonnées rationnelles et qui se trouvent sur la courbe. Il s'avère que le nombre de points rationnels est étroitement lié au degré de la courbe. Pour les courbes de degré 1 ou 2, il existe une méthode efficace pour trouver tous les points rationnels. Pour les courbes de degré 5 et plus, un théorème de Gerd Faltings (lauréat de la médaille Fields en 1986) dit qu'il n'y a qu'un nombre fini de points rationnels. Les cas les plus mystérieux sont ceux du degré 3, c'est-à-dire des courbes elliptiques, et du degré 4. On ne connaît même pas d'algorithme qui permette de décider si une courbe donnée de degré 3 ou 4 possède un nombre fini ou infini de points rationnels.

De tels algorithmes semblent hors de portée. Bhargava a adopté une approche différente et s'est demandé ce que l'on pouvait dire des points rationnels d'une courbe typique. Dans un travail en collaboration avec Arul Shankar et Christopher Skinner, Bhargava est arrivé à la conclusion surprenante qu'une proportion strictement positive des

courbes elliptiques n'a qu'un seul point rationnel et qu'une proportion strictement positive en a un nombre infini. De même, dans le cas des courbes hyperelliptiques de degré 4, Bhargava a montré qu'une proportion strictement positive de ces courbes n'a aucun point rationnel et qu'une proportion strictement positive a une infinité de points rationnels. Ces travaux ont nécessité de compter les points d'un réseau dans des régions non bornées d'un espace de grande dimension, dans lequel les régions s'enroulent en spirale vers l'extérieur en « tentacules » compliqués. Ce comptage n'aurait pas pu être effectué sans l'extension de la technique de la géométrie des nombres par Bhargava.

Bhargava a également utilisé son extension de la géométrie des nombres pour étudier le cas plus général des courbes hyperelliptiques de degré supérieur. Comme indiqué ci-dessus, le théorème de Faltings nous dit que pour les courbes de degré 5 ou plus, le nombre de points rationnels est fini, mais le théorème ne donne aucun moyen de trouver les points rationnels ou de dire exactement combien il y en a. Une fois de plus, Bhargava s'est penché sur la question de savoir ce qui se passe pour une courbe « typique ». Lorsque le degré est pair, il a constaté que la courbe hyperelliptique typique n'a aucun point rationnel. Un travail en commun avec Benedict Gross, ainsi qu'un travail subséquent de Bjorn Poonen et Michael Stoll, ont permis d'établir le même résultat pour le cas d'un degré impair. Ces travaux offrent également des estimations assez précises de la vitesse à laquelle le nombre de courbes ayant des points rationnels diminue lorsque le degré augmente. Par exemple, les travaux de Bhargava montrent que pour un polynôme typique de degré 10, il y a plus de 99 % de chances que la courbe n'ait aucun point rationnel.

Un dernier exemple des prouesses de Bhargava est son travail avec Jonathan Hanke sur ce qu'on appelle le « théorème 290 ». Ce théorème concerne une question qui remonte à l'époque de Fermat (1601-1665) : quelles formes quadratiques représentent tous les entiers ? Par exemple, tous les entiers ne sont pas la somme de deux carrés, donc $x^2 + y^2$ ne représente pas tous les entiers. La somme de trois carrés $x^2 + y^2 + z^2$ non plus. Mais comme l'a établi Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), la somme de quatre carrés $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ représente bien tous les entiers. En 1916, Srinivasa Ramanujan (1887-1920) a donné 54 autres exemples de formes à quatre variables qui représentent tous les entiers. Quelles autres formes « universelles » pourrait-il y avoir ? Au début des années 1990, John H. Conway et ses étudiants, en particulier William Schneeberger et Christopher Simons, ont abordé cette question sous

un angle différent, en se demandant s'il existe un nombre $c$ tel que si une forme quadratique représente les entiers inférieurs à $c$, alors elle représente tous les entiers. Grâce à des calculs approfondis, ils ont conjecturé que $c$ pouvait être aussi petit que 290. Ils ont fait des progrès remarquables, mais ce n'est que lorsque Bhargava et Hanke ont repris la question qu'elle a été entièrement résolue. Ils ont trouvé un ensemble de 29 entiers jusqu'à 290 inclus tel que, si une forme quadratique (en n'importe quel nombre de variables) représente ces 29 entiers, alors elle représente tous les entiers. La démonstration est une prouesse d'ingéniosité combinée à une programmation informatique poussée.

En plus d'être l'un des plus grands mathématiciens du monde, Bhargava est un musicien accompli. Il joue de l'instrument indien connu sous le nom de tabla à un niveau professionnel. Communicant hors pair, il a remporté plusieurs prix d'enseignement, et ses écrits lucides et élégants ont été récompensés par un prix pour leur présentation.

Bhargava a une intuition aiguë qui le conduit infailliblement vers des questions mathématiques profondes et belles. Grâce à son immense perspicacité et à sa grande maîtrise technique, il semble apporter un « toucher de Midas » à tout ce sur quoi il travaille. Il apportera certainement d'autres plaisirs et d'autres surprises aux mathématiques dans les années à venir.

Né en 1974 au Canada, Manjul Bhargava a grandi principalement aux États-Unis et a également passé beaucoup de temps en Inde. Il a obtenu son doctorat en 2001 à l'université de Princeton sous la direction d'Andrew Wiles. Manjul Bhargava est devenu professeur à Princeton en 2003. Il a notamment reçu le prix Merten-Hasse de l'Association mathématique américaine (2003), le prix Blumenthal pour l'avancement de la recherche en mathématiques pures (2005), le prix SASTRA Ramanujan (2005), le prix Cole en théorie des nombres de la Société mathématique américaine (2008), le prix Fermat (2011) et le prix Infosys (2012). Il a été élu à l'Académie nationale des sciences des États-Unis en 2013.

**Bibliographie**


— « En aparté avec Manjul Bhargava et Martin Hairer, *Gazette des mathématiciens*, 2014, nº 142, p. 70-76.
— Belabas (Karim) et Delaunay (Christophe), « Manjul Bhargava, anneaux de petit rang et courbes elliptiques, *Gazette des mathé-*

*maticiens*, 2015, n° 143, p. 6-15.
— Ghys (Étienne), « Manjul Bhargava, médaille Fields 2014 », *Images des mathématiques*, 2014.

# Médaille Fields : Martin Hairer

> « pour ses contributions exceptionnelles à la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques, et en particulier pour la création d'une théorie des structures de régularité pour ces équations ».

Martin Hairer a fait une percée majeure dans l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques en créant une nouvelle théorie qui fournit des outils pour s'attaquer à des problèmes qui jusque-là semblaient impénétrables.

Le sujet des équations différentielles trouve son origine dans le développement du calcul infinitésimal par Isaac Newton et Gottfried Leibniz au XVIIe siècle. L'une des principales motivations à l'époque était de comprendre le mouvement des planètes dans le système solaire. Les lois du mouvement de Newton peuvent être utilisées pour formuler une équation différentielle qui décrit par exemple le mouvement de la Terre autour du Soleil. La solution d'une telle équation est une fonction qui donne la position de la Terre à tout moment $t$. Au cours des siècles qui ont suivi, les équations différentielles sont devenues omniprésentes dans tous les domaines de la science et de l'ingénierie pour décrire des systèmes qui évoluent dans le temps.

Une équation différentielle qui décrit le mouvement d'une planète est déterministe, c'est-à-dire qu'elle détermine exactement l'endroit où se trouvera une planète à un moment donné dans le futur. D'autres équations différentielles sont stochastiques, c'est-à-dire qu'elles décrivent des systèmes qui contiennent une part inhérente d'aléatoire. Un exemple est une équation qui décrit comment le prix d'une action évolue dans le temps. Une telle équation incorpore un terme qui représente les fluctuations du cours de la bourse. Si l'on pouvait prédire exactement la nature des fluctuations, on pourrait prédire avec précision le cours futur de l'action (et devenir très riche !). Les fluctuations, bien qu'elles dépendent dans une certaine mesure du cours initial de l'action, sont essentiellement aléatoires et imprévisibles. L'équation du prix des actions est un exemple d'équation différentielle stochastique.

Dans l'équation du mouvement des planètes, le système change en fonction d'une seule variable, à savoir le temps. Une telle équation est appelée une équation différentielle ordinaire. En revanche, les équations

aux dérivées partielles (EDP) décrivent des systèmes qui changent en fonction de plus d'une variable, par exemple le temps et la position. De nombreuses EDP sont non linéaires, ce qui signifie que les termes qui les composent ne sont pas simplement proportionnels. Par exemple, ils peuvent être élevés à une certaine puissance. Certains des phénomènes naturels les plus importants sont régis par des EDP non linéaires, de sorte que la compréhension de ces équations est un objectif majeur pour les mathématiques et les sciences. Cependant, les EDP non linéaires sont parmi les objets mathématiques les plus difficiles à comprendre. Les travaux de Hairer ont suscité beaucoup d'intérêt car ils développent une théorie générale qui peut être appliquée à une grande classe d'EDP stochastiques non linéaires.

Un exemple d'EDP stochastique non linéaire qui a joué un rôle important dans les travaux de Hairer est l'équation KPZ, nommée d'après Mehran Kardar, Giorgio Parisi et Yi-Cheng Zhang, les physiciens qui ont proposé l'équation en 1986 pour le mouvement des interfaces en croissance. Pour mieux comprendre la nature de l'équation, considérons le modèle simplifié suivant de dépôt balistique. Les particules se déplacent vers un substrat et se collent à leur arrivée. En conséquence, la hauteur du substrat augmente linéairement dans le temps, tout en devenant de plus en plus irrégulière. Dans ce contexte, l'équation KPZ décrit l'évolution temporelle de l'interface entre le vide et le matériau accumulé. Le caractère aléatoire des positions et des temps d'arrivée des particules introduit un bruit blanc spatio-temporel dans l'équation, transformant ainsi l'équation KPZ en une EDP stochastique, qui décrit l'évolution dans le temps de l'interface rugueuse et irrégulière entre le vide au-dessus et le matériau qui s'accumule en dessous. Une solution de l'équation KPZ fournirait, pour tout temps $t$ et tout point le long du bord inférieur du substrat, la hauteur de l'interface au-dessus de ce point.

L'équation KPZ pose un défi : bien qu'elle soit logique du point de vue de la physique, elle ne l'est pas du point de vue mathématique. Une solution de l'équation KPZ devrait être un objet mathématique qui représente la nature rugueuse et irrégulière de l'interface. Un tel objet n'est pas lisse ; en termes mathématiques, il n'est pas différentiable. Pourtant, deux des termes de l'équation de KPZ exigent que l'objet soit différentiable. Il existe un moyen de contourner cette difficulté en utilisant ce qu'on appelle une distribution. Mais un nouveau problème se pose alors, car l'équation KPZ n'est pas linéaire : elle contient un terme au carré. Or les distributions ne peuvent pas être élevées au

carré. Pour ces raisons, l'équation KPZ n'était pas bien définie. Bien que les chercheurs aient trouvé quelques astuces techniques pour atténuer ces difficultés dans le cas particulier de l'équation KPZ, le problème fondamental de sa mauvaise formulation est longtemps resté non résolu.

Hairer a surmonté ces difficultés en décrivant une nouvelle approche pour l'équation KPZ qui permet de donner un sens mathématiquement précis à l'équation et à ses solutions. De plus, dans des travaux ultérieurs, il a utilisé les idées qu'il avait développées pour l'équation KPZ pour construire une théorie générale, la théorie des structures de régularité, qui peut être appliquée à une large classe d'EDP stochastiques. En particulier, la théorie de Hairer peut être utilisée dans des dimensions supérieures.

L'idée de base de l'approche de Hairer concernant l'équation KPZ est la suivante. Au lieu de faire l'hypothèse habituelle que les petits effets aléatoires se produisent à une échelle infiniment petite, il a adopté l'hypothèse que les effets aléatoires se produisent à une échelle qui est petite par rapport à l'échelle à laquelle le système est considéré. La suppression de l'hypothèse infinitésimale, que Hairer appelle « régularisation du bruit », donne une équation qui peut être résolue. La solution obtenue n'est pas une solution de KPZ, mais elle peut être utilisée comme point de départ pour construire une suite d'objets qui, à la limite, converge vers une solution de l'équation KPZ. Hairer a démontré un fait crucial : la solution limite est toujours la même, quel que soit le type de régularisation du bruit utilisé.

La théorie générale de Hairer porte sur d'autres EDP stochastiques de dimension supérieure qui ne sont pas bien définies. Pour ces équations, comme pour KPZ, la principale difficulté réside dans le fait qu'à très petite échelle, le comportement des solutions est très irrégulier. Si la solution était une fonction lisse, on pourrait effectuer un développement de Taylor, qui est une façon d'approcher la fonction par des polynômes de degrés de plus en plus élevés. Mais la non-régularité des solutions fait qu'elles ne sont pas bien approchées par des polynômes. Au lieu de cela, Hairer a défini des objets conçus sur mesure pour l'équation en question, qui donnent une approximation du comportement de la solution à petite échelle. Ces objets jouent alors un rôle similaire à celui des polynômes dans un développement de Taylor. En chaque point, la solution ressemblera à une superposition infinie de ces objets. La solution finale est alors obtenue en recollant les superpositions ponctuelles. Hairer a établi le fait crucial que la solution ultime ne dépend pas des

objets approximatifs utilisés pour l'obtenir.

Avant les travaux de Hairer, les chercheurs avaient réalisé de nombreux progrès dans la compréhension des EDP stochastiques linéaires, mais il existait un obstacle fondamental à l'étude des cas non linéaires. La nouvelle théorie de Hairer permet de lever ce blocage. De plus, la classe d'équations à laquelle la théorie s'applique en contient plusieurs qui sont d'un intérêt central pour les mathématiques et la science. En outre, ses travaux pourraient ouvrir la voie à la compréhension du phénomène de l'universalité. D'autres équations, lorsqu'elles sont redimensionnées, convergent vers l'équation KPZ. Il semble donc qu'un phénomène universel se cache à l'arrière-plan. Les travaux de Hairer pourraient fournir des outils analytiques rigoureux pour étudier cette universalité.

Avant de développer la théorie des structures de régularité, Hairer a apporté d'autres contributions remarquables. Par exemple, son travail en collaboration avec Jonathan Mattingly constitue une avancée significative dans la compréhension d'une version stochastique des équations de Navier-Stokes, une EDP non linéaire qui décrit le mouvement des fluides.

En plus d'être l'un des meilleurs mathématiciens du monde, Hairer est un très bon programmeur informatique. Alors qu'il était encore lycéen, il a créé un logiciel d'édition audio qu'il a ensuite développé et commercialisé avec succès sous le nom de « couteau suisse de l'édition sonore ». Ses travaux mathématiques ne dépendent pas des ordinateurs, mais il trouve que la programmation de petites simulations aide à développer l'intuition.

Grâce à sa grande maîtrise technique et à son intuition profonde des systèmes physiques, Hairer est un chef de file dans le domaine qui apportera sans aucun doute de nombreuses autres contributions significatives.

Né en 1975, Martin Hairer est citoyen autrichien. En 2001, il a obtenu son doctorat en physique à l'université de Genève, sous la direction de Jean-Pierre Eckmann. Il est actuellement professeur de mathématiques à l'université de Warwick. Il a notamment reçu le prix Whitehead de la Société mathématique de Londres (2008), le prix Philip-Leverhulme (2008), la bourse Wolfson de la Société royale de Londres (2009), le prix Fermat (2013) et le prix Fröhlich de la Société mathématique de Londres (2014). Il a été élu membre de la Société royale de Londres en 2014.

**Bibliographie**


— « En aparté avec Manjul Bhargava et Martin Hairer », *Gazette des mathématiciens*, 2014, nº 142, p. 77-81.
— Delarue (François), « Martin Hairer, l'équation de KPZ et les structures de régularité », *Gazette des mathématiciens*, 2015, nº 143, p. 15-28.
— Ghys (Étienne), « Martin Hairer, médaille Fields 2014 », *Images des mathématiques*, 2014.
— Hairer (Martin), « Des cours de la bourse au jeu de Tetris », Genève, 17/03/2015.
— Hairer (Martin), « Un voyage mathématique de l'infiniment petit à l'infiniment grand », Genève, novembre 2020.

# Médaille Fields : Maryam Mirzakhani

> « pour ses contributions exceptionnelles à la dynamique et à la géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules ».

Maryam Mirzakhani a apporté des contributions remarquables et très originales à la géométrie et aux systèmes dynamiques. Ses travaux sur les surfaces de Riemann et leurs espaces de modules jettent un pont entre plusieurs disciplines mathématiques (la géométrie hyperbolique, l'analyse complexe, la topologie et la théorie des systèmes dynamiques) et les influencent toutes en retour. Ses premiers résultats en géométrie hyperbolique ont été largement reconnus. Ses travaux les plus récents constituent une avancée majeure dans le domaine des systèmes dynamiques.

Les surfaces de Riemann doivent leur nom au mathématicien du XIXe siècle Bernhard Riemann, qui a été le premier à comprendre l'importance des surfaces abstraites, par opposition aux surfaces qui apparaissent concrètement dans un espace ambiant. Les mathématiciens qui se sont appuyés sur les idées de Riemann ont compris, il y a plus de cent ans, que ces surfaces peuvent être classées topologiquement, c'est-à-dire à déformation près, par un seul nombre à savoir le nombre d'anses. Ce nombre est appelé le genre de la surface. La sphère a un genre nul, la surface d'une tasse à café un genre égal à un, et la surface d'un véritable bretzel un genre égal à trois. Si l'on ne tient pas compte de la forme géométrique précise, il existe exactement une surface de genre $g$ pour tout entier strictement positif $g$.

Une surface devient une surface de Riemann lorsqu'elle est dotée d'une structure géométrique supplémentaire. On peut considérer cette structure géométrique comme une structure dite complexe, qui permet de faire de l'analyse complexe sur la surface abstraite. Comme les nombres complexes impliquent deux paramètres réels, une surface bidimensionnelle sur les nombres réels n'a qu'une dimension complexe et est parfois appelée « courbe complexe ». Le fait suivant relie la théorie des surfaces de Riemann à la géométrie algébrique : toute courbe complexe est une courbe algébrique, ce qui signifie que la courbe complexe, bien que définie abstraitement, peut être réalisée comme une courbe dans un espace ambiant standard, dans lequel elle est l'ensemble

des zéros de polynômes convenablement choisis. Ainsi, bien qu'une surface de Riemann soit a priori un objet analytique défini en termes d'analyse complexe sur des surfaces abstraites, il s'avère qu'elle possède une description algébrique en termes d'équations polynomiales.

Une autre façon équivalente de définir une surface de Riemann consiste à introduire une géométrie qui permet de mesurer les angles, les longueurs et les surfaces. La plus importante de ces géométries est la géométrie hyperbolique, le premier exemple de géométrie non euclidienne découvert par Bolyai, Gauss et Lobatchevski. L'équivalence entre les structures algébriques complexes et hyperboliques sur les surfaces est à la base de la riche théorie des surfaces de Riemann.

Les premiers travaux de Mirzakhani concernent les géodésiques fermées sur une surface hyperbolique. Il s'agit de courbes fermées dont la longueur ne peut être réduite en les déformant. Un théorème désormais classique, démontré il y a plus de cinquante ans, permet d'estimer avec précision le nombre de géodésiques fermées dont la longueur est inférieure à une certaine borne L. Le nombre de géodésiques fermées croît exponentiellement avec L ; plus précisément, il croît comme $e^{\mathrm{L}}/\mathrm{L}$ quand L tend vers l'infini. Ce théorème est appelé « théorème des nombres premiers pour les géodésiques », car il est exactement analogue au théorème des nombres premiers habituel pour les nombres entiers, qui permet d'estimer combien il y a de nombres premiers inférieurs à un nombre donné. Dans ce cas, le nombre de nombres premiers inférieurs à $e^{\mathrm{L}}$ croît comme $e^{\mathrm{L}}/\mathrm{L}$ quand L tend vers l'infini.

Mirzakhani a examiné ce qu'il advient du « théorème des nombres premiers pour les géodésiques » lorsque l'on ne considère que les géodésiques fermées qui sont simples, c'est-à-dire qui ne se coupent pas elles-mêmes. Le comportement est très différent dans ce cas : la croissance du nombre de géodésiques de longueur au plus égale à L n'est plus exponentielle en L mais de l'ordre de $\mathrm{L}^{6g-6}$, où $g$ est le genre. Mirzakhani a montré qu'en fait le nombre croît comme $c \cdot \mathrm{L}^{6g-6}$ lorsque L tend vers l'infini, où la constante $c$ dépend de la structure hyperbolique.

Bien qu'il s'agisse d'une affirmation concernant une seule structure hyperbolique arbitraire sur une surface, Mirzakhani l'a démontrée en considérant toutes les structures de ce type simultanément. Les structures complexes sur une surface de genre $g$ forment un espace continu, ou non discret, puisqu'elles ont des déformations continues. Alors que la surface topologique sous-jacente reste la même, sa forme

géométrique change au cours d'une déformation. Riemann savait que ces déformations dépendent de $6g-6$ paramètres ou « modules », ce qui signifie que l'« espace de modules » des surfaces de Riemann de genre $g$ a une dimension égale à $6g-6$. Cependant, cela ne dit rien sur la structure globale de l'espace de modules, qui est extrêmement compliquée et encore très mystérieuse. L'espace de modules a une géométrie très complexe qui lui est propre. Différentes façons de considérer les surfaces de Riemann permettent d'obtenir différents aperçus de sa géométrie et de sa structure. Par exemple, considérer les surfaces de Riemann comme des courbes algébriques conduit à la conclusion que l'espace de modules lui-même est un objet algébrique appelé variété algébrique.

Dans la démonstration par Mirzakhani de son résultat de comptage pour les géodésiques fermées simples, une autre structure sur l'espace de modules entre en jeu, une structure dite symplectique, qui permet en particulier de mesurer les volumes (mais pas les longueurs). En généralisant des travaux antérieurs de G. McShane, Mirzakhani a établi un lien entre les calculs de volume sur l'espace de modules et le problème du comptage des géodésiques fermées simples sur une surface unique. Elle calcule certains volumes dans l'espace de modules et déduit ensuite de ce calcul le résultat du comptage des géodésiques fermées simples.

Ce point de vue a permis à Mirzakhani de mieux comprendre d'autres questions relatives à l'espace de modules. L'une des conséquences a été une démonstration nouvelle et inattendue d'une conjecture d'Edward Witten (lauréat de la médaille Fields en 1990), l'une des figures de proue de la théorie des cordes. L'espace de modules comporte de nombreux lieux spéciaux qui correspondent à des surfaces de Riemann ayant des propriétés particulières. Ces lieux peuvent se couper. Pour des lieux convenablement choisis, ces intersections ont des interprétations physiques. Sur la base d'une intuition physique et de calculs qui n'étaient pas tout à fait rigoureux, Witten a émis une conjecture sur ces intersections qui a attiré l'attention des mathématiciens. Maxim Kontsevitch (médaille Fields en 1998) a démontré la conjecture de Witten par une vérification directe en 1992. Quinze ans plus tard, les travaux de Mirzakhani ont permis de relier la conjecture profonde de Witten sur l'espace de modules à des problèmes élémentaires de comptage de géodésiques sur des surfaces individuelles.

Ces dernières années, Mirzakhani a exploré d'autres aspects de la géométrie de l'espace de modules. Comme mentionné précédemment, l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre $g$ est lui-même

un objet géométrique de dimension $6g - 6$ qui possède une structure complexe et en fait algébrique. En outre, l'espace de modules possède une métrique dont les géodésiques sont naturelles à étudier. Mirzakhani et ses collègues ont démontré un autre analogue du « théorème des nombres premiers pour les géodésiques fermées », qui compte les géodésiques fermées dans l'espace de modules plutôt que sur une surface unique. Elle a également étudié certains systèmes dynamiques (c'est-à-dire des systèmes qui évoluent avec le temps) sur l'espace de modules. Elle a démontré en particulier que le système connu sous le nom de « flot du tremblement de terre » introduit par William Thurston (lauréat de la médaille Fields en 1982) est chaotique.

Plus récemment, Mirzakhani, en collaboration avec Alex Eskin et en partie avec Amir Mohammadi, a fait une percée majeure dans la compréhension d'un autre système dynamique sur l'espace de modules qui est lié au comportement des géodésiques dans l'espace de modules. Les géodésiques non fermées dans l'espace de modules sont très erratiques voire pathologiques. Il est difficile de comprendre leur structure et la façon dont elles changent lorsqu'elles sont légèrement perturbées. Cependant, Mirzakhani et ses collaborateurs ont démontré que les géodésiques complexes et leurs fermetures dans l'espace de modules sont en fait étonnamment régulières, plutôt qu'irrégulières ou fractales. Il s'avère que si les géodésiques complexes sont des objets transcendants définis en termes d'analyse et de géométrie différentielle, leurs fermetures sont des objets algébriques définis en termes de polynômes et possèdent donc certaines propriétés de rigidité.

Ce travail a été salué par les chercheurs du domaine, qui s'efforcent d'étendre et de développer ce nouveau résultat. L'une des raisons pour lesquelles ces travaux ont suscité autant d'enthousiasme est que le théorème démontré par Mirzakhani et Eskin est analogue à un résultat célèbre de Marina Ratner qui date des années quatre-vingt-dix. Ratner a établi la rigidité des systèmes dynamiques sur des espaces homogènes, c'est-à-dire des espaces dans lesquels le voisinage de n'importe quel point est identique à celui de n'importe quel autre point. En revanche, l'espace de modules est totalement inhomogène : chaque partie de l'espace est totalement différente de toutes les autres. Il est étonnant de constater que la rigidité des espaces homogènes trouve un écho dans le monde inhomogène de l'espace de modules.

En raison de sa complexité et de son inhomogénéité, l'espace de modules a souvent semblé impossible à étudier directement, mais pas pour Mirzakhani. Elle possède une forte intuition géométrique

qui lui permet de s'attaquer directement à la géométrie de l'espace de modules. Maîtrisant un éventail remarquablement diversifié de techniques mathématiques et de cultures mathématiques disparates, elle incarne une combinaison rare de superbes capacités techniques, d'ambition audacieuse, de vision à long terme et de profonde curiosité. L'espace de modules est un monde dans lequel de nombreux nouveaux territoires attendent d'être découverts. Mirzakhani restera certainement une figure de proue au fur et à mesure que les explorations se poursuivront.

Née en 1977 à Téhéran en Iran, Maryam Mirzakhani a obtenu son doctorat en 2004 à l'université Harvard sous la direction de Curtis McMullen. De 2004 à 2008, elle a été boursière de recherche de l'institut de mathématiques Clay et professeur adjoint à l'université de Princeton. Elle est actuellement professeur à l'université Stanford. [11] Elle a reçu le prix Blumenthal 2009 pour l'avancement de la recherche en mathématiques pures et le prix Satter 2013 de la Société américaine de mathématiques.

**Bibliographie**


— Ghys (Étienne), « Maryam Mirzakhani, médaille Fields 2014 », *Images des mathématiques*, 2014.
— Goujard (Élise), « Sur quelques travaux de Mirzakhani », CNRS, 2019.
— Haguel (Marie-Jane), « Hommage à Maryam Mirzakhani », *Bulletin AMQ*, 2017, nº 3, p. 17-23.
— Zorich (A), « Le théorème de la baguette magique, *Gazette des mathématiciens*, 2014, nº 142, p. 39-54.
— Zorich (A), « Maryam Mirzakhani », *Gazette des mathématiciens*, 2017, nº 154, p. 77-80.


11. NDT. Mirzakhani est décédée en 2017.

# Prix Gauss : Stanley Osher

> « pour ses contributions qui ont influencé plusieurs domaines des mathématiques appliquées et pour ses inventions de grande portée qui ont modifié notre compréhension de concepts physiques, perceptifs et mathématiques, en nous donnant de nouveaux outils pour appréhender le monde ».

Stanley Osher a apporté des contributions significatives dans un grand nombre de domaines des mathématiques appliquées. Cela comprend notamment des méthodes de détection de chocs à haute résolution pour les équations hyperboliques, des méthodes de surfaces de niveau, des méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP) dans le domaine de la vision par ordinateur et du traitement d'images, et l'optimisation. Ses contributions en matière d'analyse numérique, notamment le schéma d'Engquist-Osher, les schémas qui diminuent la variation totale, les conditions d'entropie, les schémas essentiellement non oscillatoires ou essentiellement non oscillatoires à poids, et les schémas numériques pour les équations de type Hamilton-Jacobi, ont révolutionné le domaine. Ses contributions aux surfaces de niveau comprennent le nouveau calcul infinitésimal sur les surfaces de niveau, de nouvelles techniques numériques, la modélisation des fluides et des matériaux, les approches variationnelles, l'analyse des mouvements en haute codimension, l'optique géométrique et le calcul des solutions discontinues des équations de Hamilton-Jacobi. Les méthodes de surfaces de niveau ont eu une influence considérable sur la vision par ordinateur, le traitement d'images et l'infographie. En outre, ces nouvelles méthodes ont motivé certaines des études les plus fondamentales de la théorie des EDP au cours des dernières années, complétant ainsi l'image des mathématiques appliquées comme source d'inspiration pour les mathématiques pures.

Stanley Osher possède des qualités uniques de mentor. Il a influencé la formation de générations d'excellents mathématiciens appliqués. Grâce à son esprit d'entreprise, il a réussi à mettre ses mathématiques à la portée de l'industrie. Mathématicien appliqué de formation et toute sa vie, Osher continue de surprendre la communauté mathématique et numérique par l'invention de schémas et par des formules simples et astucieuces.

**Vulgarisation**

Stanley Osher est un pont unique entre les mathématiques avancées et les problèmes pratiques du monde réel. À maintes reprises, il s'est profondément impliqué dans le monde des ingénieurs et des scientifiques appliqués et a ensuite développé des techniques mathématiques pour résoudre leurs problèmes avec une puissance, une rapidité et une élégance sans précédent. Parce qu'il adapte si finement ses solutions à leurs besoins, ses techniques ont été largement adoptées et ont eu un impact très grand, contribuant à l'arrestation de criminels, à la création de films d'animation, à l'amélioration des appareils IRM, à la conception de puces informatiques, et à bien d'autres choses encore.

L'une de ses principales contributions a été de développer la méthode des surfaces de niveau avec James Sethian. Le problème de base consiste à décrire mathématiquement une forme changeante. Imaginez par exemple qu'une goutte d'huile flotte sur l'eau et que vous souhaitiez écrire une équation qui permette de prédire comment sa forme changera en fonction des courants dans l'eau. Une façon traditionnelle de procéder consiste à imaginer un ensemble de bouées le long du bord de la goutte, reliées par des cordes extensibles. À chaque instant, vous pouvez alors décrire comment les bouées se déplacent, ce qui vous donne une bonne approximation de la forme générale.

Cette méthode ne fonctionne cependant pas si bien si votre goutte d'huile se divise en deux, comme c'est parfois le cas. Il n'est pas évident de décrire cela avec des bouées, puisque vous devez également couper les cordes entre elles et les renouer. Ou encore, supposons que deux gouttes d'huile différentes fusionnent : certaines de vos bouées disparaissent alors complètement ou sont absorbées dans l'autre goutte d'huile, ou quelque chose du genre. C'est la pagaille.

Osher et Sethian ont proposé une approche entièrement nouvelle. Ils imaginent que le contour de la goutte d'huile est une coupe horizontale d'un objet tridimensionnel. Le reste de la forme de l'objet n'a pas beaucoup d'importance, tant que la tranche a la bonne forme. Ils appliquent ensuite les lois de la physique concernant la goutte d'huile (pour des courants dans l'eau par exemple) à l'ensemble de l'objet tridimensionnel. Pour retrouver la forme de la goutte d'huile à un autre moment, il suffit de prendre la même coupe horizontale de l'objet plus tard. Si la goutte d'huile se sépare, l'objet tridimensionnel a développé deux bosses distinctes. Et si deux gouttes se rejoignent, c'est que deux « jambes » de l'objet ont convergé.

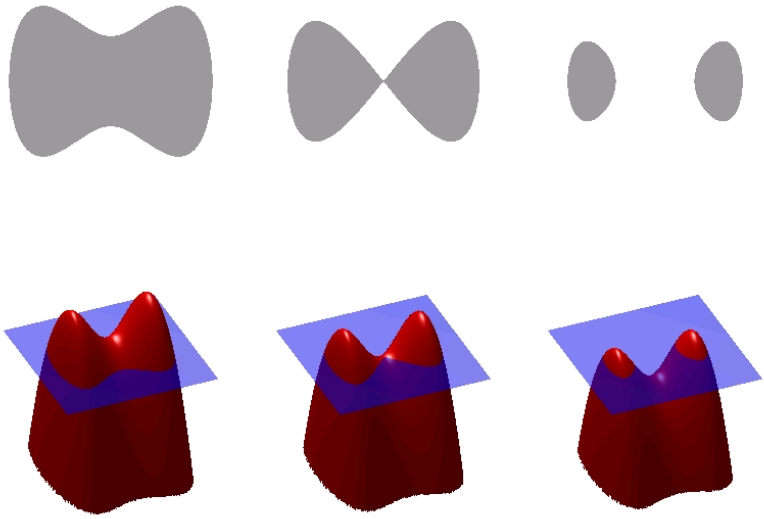


Fig. 1 – *Les coupes horizontales de l'objet rouge tridimensionnel en bas montrent la forme d'une goutte d'huile qui évolue au fil du temps. Cette représentation permet de gérer efficacement des comportements tels que la séparation de la goutte en deux.*

Bien que la transformation du problème de la prédiction de l'évolution d'un objet bidimensionnel en prédiction de l'évolution d'un objet tridimensionnel semble compliquer les choses, elle résout tous les problèmes de gestion de la méthode des bouées et des cordes et donne une représentation simple, puissante et propre qui peut gérer toutes les choses bizarres que la goutte d'huile pourrait faire.

Cette idée relativement simple s'avère extrêmement puissante. Par exemple, la méthode des surfaces de niveau est désormais utilisée par toutes les grandes entreprises d'animation cinématographique pour animer les fluides, notamment par Pixar, Disney, ILM, Dreamworks et bien d'autres encore. Elle permet aux animateurs d'appliquer les véritables lois de la physique aux fluides, créant ainsi des images beaucoup plus réalistes. Par exemple, le maelström géant dans le troisième film de la série *Pirates des Caraïbes* et le souffle enflammé du dragon dans

*Harry Potter et la Coupe de feu* ont été créés à l'aide de surfaces de niveau. L'un des étudiants d'Osher, Ron Fedkiw, de l'université Stanford, a remporté un Oscar pour son travail sur l'animation cinématographique qui utilise ces méthodes.

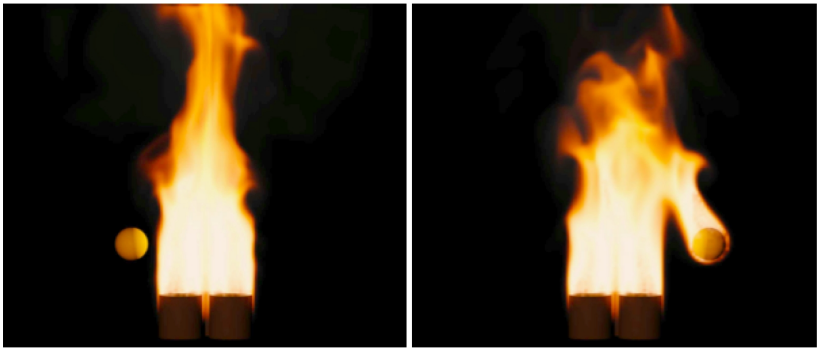


Fig. 2 – *Ceci n'est pas une photographie. Il s'agit d'une simulation informatique d'une balle qui vole à travers une flamme et prend feu. Elle a été créée à l'aide des méthodes d'Osher. Crédits : Ron Fedkiw, Duc Nguyen et Doug Enright.*

D'un point de vue plus pratique, la méthode des surfaces de niveau est utile pour prédire le temps, concevoir des puces informatiques, identifier la source d'un tremblement de terre, modéliser la croissance des tumeurs, analyser les appareils d'imagerie médicale, et bien d'autres choses encore.

Un autre domaine que Osher a révolutionné est la modélisation de la façon dont les avions supersoniques fendent l'air. L'air s'écoule doucement autour des avions qui volent à des vitesses normales. Mais lorsque les avions s'approchent de la vitesse du son, l'air ne peut pas s'écarter assez vite. En conséquence, la densité, la pression, la température et la vitesse de l'air changent presque instantanément. En termes mathématiques, ce changement instantané s'appelle une « discontinuité ». C'est un très gros problème, car les méthodes traditionnelles dépendent toutes de changements progressifs. Osher, en collaboration avec Amiram Harten, Bjorn Engquist et Chi-Wang Shu, a mis au point de nouvelles techniques mathématiques capables de gérer ces discontinuités. Cela permet de modéliser par ordinateur la conception de nouveaux avions supersoniques.

Osher a ensuite appliqué des idées similaires à un problème totalement différent : rendre les images floues plus nettes. La ligne qui sépare

sur une photographie le pied sombre d'une table d'un fond clair est un autre exemple de discontinuité. Avec Leonid Rudin, Osher a appliqué aux images les techniques mathématiques qu'il avait mises au point pour modéliser les avions à réaction supersoniques, ce qui lui a permis de faire ressortir ces discontinuités et de les rendre plus nettes.

Leurs techniques sont également nées de la reconnaissance du fait qu'une grande partie du flou d'une image n'est pas aléatoire : il provient de processus physiques tels que le tremblement de la main qui tient l'appareil photo. L'identification de ces processus et leur inversion réduisent le flou. Mais c'est plus facile à dire qu'à faire, car l'information est perdue lorsque l'image est floue. Les méthodes d'Osher permettent d'en récupérer une partie en combinant les informations de plusieurs images. Il a également mis au point des algorithmes très efficaces pour effectuer la transformation.

Ne se contentant pas de développer des méthodes théoriques, Osher (avec Rudin) a créé une société, Cognitech, pour les commercialiser. Le succès le plus célèbre de cette société s'est produit lors d'un procès après les émeutes de 1992 à Los Angeles. Des émeutiers ont attaqué un camion qui passait par là, lui jetant des pierres, traînant le chauffeur hors de la cabine, le battant jusqu'à ce qu'il perde connaissance et lui brisant le crâne en 91 points. Toute l'attaque a été filmée par un hélicoptère de la télévision (l'un des agresseurs a même dansé sur le corps inconscient de la victime et a montré à l'hélicoptère des symboles de son gang). Les images étant floues, les procureurs ont fait appel à Cognitech pour les aider à identifier les agresseurs. Les enquêteurs se sont concentrés sur une tache sur le bras de l'un des hommes, moins de 1/6 000$^{e}$ de la taille de la photographie totale. Les algorithmes ont révélé qu'il s'agissait d'un tatouage en forme de rose. L'homme a été identifié plus tard comme étant Damian Monroe Williams. Il a été reconnu coupable de l'agression. Cognitech continue d'être utile pour les services de police à travers les États-Unis.

Un autre algorithme astucieux d'Osher permet aux gens d'obtenir plus rapidement de meilleurs examens IRM. S'appuyant sur les idées de David Donoho, Emmanuel Candès et Terence Tao en matière d'acquisition comprimée, il a généralisé ses méthodes de traitement d'images à toutes les situations où l'on souhaite présenter des informations en utilisant le moins de données possible. Par exemple, la norme JPEG est un algorithme qui stocke les images en utilisant moins d'octets, tout en ne perdant qu'une petite quantité de détails. Osher a développé des algorithmes pour faire la même chose en sens inverse, de sorte

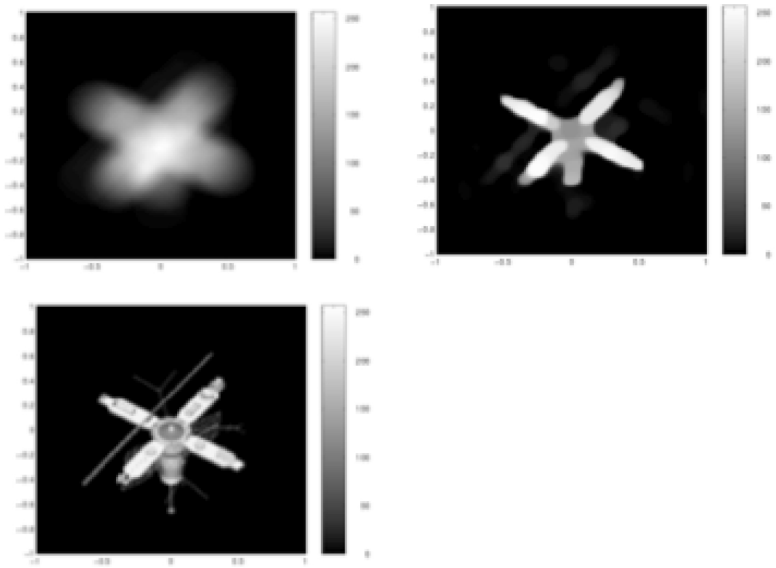


Fig. 3 – *L'image en haut à gauche est une photo floue. Les méthodes d'Osher la rendent plus nette dans l'image de droite. L'image du bas est une photo nette du même objet.*

que la numérisation rassemble ses données dans un format compressé, nécessitant moins de données pour obtenir une vue claire. Un autre exemple d'application de ces techniques est le « problème Netflix », qui consiste à prédire les films que vous aimerez à partir de vos films favoris. Les films que vous avez vus et aimés sont les données représentées sous forme comprimée, et le problème consiste à les décompresser pour découvrir tous les films que vous aimerez.

Aussi divers que soient les impacts d'Osher sur le monde, ils sont tous le fruit d'algorithmes intelligents et efficaces qui s'appuient sur des mathématiques profondes. « J'écris les algorithmes qui font chanter l'ordinateur », a déclaré Osher au *Los Angeles Times*.

**Bibliographie**

— Ghys (Étienne), « Stanley Osher, prix Gauss 2014 », *Images des mathématiques*, 2014.

# Médaille Chern : Phillip Griffiths

> « pour avoir développé de manière décisive les méthodes transcendantes en géométrie complexe, en particulier pour ses travaux fondamentaux sur la théorie de Hodge et sur les périodes des variétés algébriques ».

Les travaux de Phillip Griffiths en géométrie algébrique, en géométrie différentielle et sur les équations différentielles ont stimulé un large éventail d'avancées en mathématiques au cours des cinquante dernières années et continuent aujourd'hui d'influencer et d'inspirer un très grand nombre de recherches.

Il a mis en œuvre à la fois des techniques classiques et des idées étonnamment originales sur toute une série de problèmes de géométrie réelle ou complexe. Il a élaboré tout un programme d'application : aux applications des périodes et aux domaines de périodes, aux cycles, à la théorie de Nevanlinna, à la théorie de Brill-Noether et à la topologie des variétés kählériennes.

Une caractéristique du travail de Griffiths est que, bien qu'il ait eu souvent un problème spécifique en vue, il a servi dans de nombreux cas à ouvrir un domaine entier de recherche.

Très tôt, il a établi des liens entre la théorie des déformations et la théorie de Hodge par le biais de méthodes infinitésimales, ce qui l'a amené à découvrir ce que l'on appelle aujourd'hui les relations de période infinitésimale de Griffiths. Ces méthodes ont motivé l'élaboration du jacobien intermédiaire de Griffiths, qui a permis de résoudre le problème consistant à montrer que l'équivalence algébrique et l'équivalence homologique des cycles sont distinctes. Son travail avec C. H. Clemens sur la non-rationalité du solide cubique est devenu un modèle pour de nombreuses autres applications des méthodes transcendantes à l'étude des variétés algébriques.

Ses recherches de grande portée ont permis d'appliquer de nombreuses techniques nouvelles à ces problèmes et ont débouché sur des idées et des progrès dans de nombreux autres domaines de la géométrie qui semblent à première vue très éloignés de la géométrie complexe. Ses recherches sur les systèmes surdéterminés d'équations différentielles ont conduit à une revitalisation de ce sujet dans les années quatre-vingt sous la forme de systèmes différentiels extérieurs, qu'il a appliqués à

des problèmes profonds de la géométrie différentielle moderne : rigidité des plongements isométriques dans le cas surdéterminé et existence locale de solutions lisses dans le cas déterminé en dimension 3, en s'appuyant sur des résultats profonds relatifs aux équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques (en collaboration avec Berger, Bryant et Yang) ; formulations géométriques de l'intégrabilité dans le calcul des variations et dans la géométrie des paires de Lax ; traités sur la géométrie des lois de conservation et des problèmes variationnels pour les EDP elliptiques, hyperboliques et paraboliques et pour les systèmes différentiels extérieurs.

Tous ces domaines, et bien d'autres en géométrie algébrique, y compris la théorie des tissus, les systèmes intégrables et les surfaces de Riemann, connaissent actuellement des développements importants qui ont été stimulés par ses travaux.

Sa carrière d'enseignant et son rôle moteur dans la recherche ont inspiré un nombre stupéfiant de mathématiciens qui ont ensuite mené des carrières remarquables, tant en mathématiques que dans d'autres disciplines. Il a été généreux de son temps, rédigeant de nombreux exposés et ouvrages classiques, tels que les *Principes de géométrie algébrique* avec Joseph Harris, qui ont inspiré les étudiants en la matière depuis les années 1960.

Griffiths a également beaucoup soutenu les mathématiques au niveau de la recherche et de l'enseignement en siégeant ou en présidant dans de nombreux comités et conseils nationaux ou internationaux. En plus de sa carrière de chercheur, il a été pendant huit ans doyen de l'université Duke et pendant douze ans directeur de l'Institut d'étude avancée à Princeton. Il préside actuellement le Groupe d'initiatives pour la science, qui aide au développement de centres de formation en mathématiques dans les pays en voie de développement.

L'héritage qu'il a laissé en matière de recherche et de service à la communauté mathématique et au monde scientifique en général continue d'être une source d'inspiration pour les mathématiciens du monde entier. Il a enrichi notre sujet et fait progresser la discipline de multiples façons.

## Vulgarisation

Phillip Griffiths est une figure singulière des mathématiques. Pendant plus de cinquante ans, il a été à la pointe de la recherche et a apporté des contributions au plus haut niveau dans plusieurs domaines,

notamment en géométrie algébrique et en géométrie différentielle. Il a également été un enseignant exceptionnel et un mentor pour les jeunes qui se lancent dans les mathématiques. Ses exposés ont été couverts d'éloges et ses livres ont eu une influence durable. En plus de ses contributions au domaine des mathématiques, Griffiths a eu un impact substantiel sur l'ensemble de l'entreprise scientifique dans le monde entier grâce à ses travaux approfondis sur la politique scientifique, à sa direction de l'Institut d'étude avancée pendant plus d'une décennie et à son travail en faveur de la science dans les pays en voie de développement. Avoir contribué à un niveau aussi élevé à tant d'aspects différents de la vie mathématique et scientifique est vraiment extraordinaire.

Juste après avoir obtenu son doctorat à l'université de Princeton en 1962 sous la direction de Donald Spencer, Griffiths a rejoint l'université de Californie à Berkeley avec une bourse Miller. C'est là qu'il est entré en contact avec Shiing-Shen Chern (1911-2004), qui a donné son nom à la médaille Chern. [12] Chern, l'une des grandes figures des mathématiques du XXe siècle, était un géomètre aux intérêts multiples et à la vision profonde. Il avait également un sens profond de la responsabilité dans le développement de la culture mathématique et de la communauté mathématique. Il a fait une impression durable sur le jeune Griffiths. Les deux hommes sont devenus des collaborateurs et des amis pour la vie.

Dans ses recherches mathématiques, Griffiths n'est pas tant connu pour avoir démontré de grands théorèmes ou pour avoir donné son nom à des objets, bien qu'il ait certainement fait les deux. Il est plutôt connu pour avoir été le pionnier de nouvelles approches ou stratégies qui se sont avérées très fructueuses, pour avoir établi des connexions entre des domaines qui semblaient auparavant sans rapport, et pour avoir ouvert de nouvelles voies de recherche qu'il a ensuite poursuivies avec d'autres. Il a également la capacité, malgré la formidable machinerie technique utilisée dans son travail, de s'en tenir au cœur intuitif du problème à résoudre, a fait remarquer Robert Bryant de l'université Duke qui a présidé le comité de sélection de la médaille Chern 2014. « Même lorsque les mathématiciens discutent de concepts géométriques très abstraits, ils parlent souvent comme s'il s'agissait d'objets tangibles et y attachent un sens presque physique », a déclaré Bryant. « La manière dont cette sorte de sens métaphorique contribue à notre compréhension des concepts est mystérieuse, mais elle est souvent la marque d'une grande perspicacité. Griffiths a une capacité étonnamment forte à

12. NDT. En pinyin, Chén Xǐngshēn.

invoquer ce type d'intuitions et à les communiquer aux autres. »

L'une des grandes contributions de Griffiths a été de percevoir cette intuition dans le travail des maîtres mathématiques du passé et de la réinterpréter en termes modernes. Par exemple, les mathématiciens ont regardé d'un mauvais œil les travaux de l'école italienne de géométrie algébrique de la fin du XIXe et du début du XXe siècle parce qu'ils n'étaient pas conformes aux nouvelles normes de rigueur qui ont vu le jour par la suite. Les géomètres algébristes italiens avaient néanmoins le génie de l'intuition géométrique. Griffiths s'est imprégné de cette intuition et l'a rendue précise en utilisant des techniques modernes. Il a également repris et ravivé l'intérêt pour les travaux d'Élie Cartan (1869-1951) sur les systèmes différentiels extérieurs. Bien qu'il soit riche en idées extraordinaires, le travail de Cartan avait été négligé parce qu'il était difficile à lire et qu'il n'avait pas été placé dans un cadre systématique. Après que Griffiths et ses collaborateurs ont développé et approfondi les idées issues des travaux de Cartan, les systèmes différentiels extérieurs ont eu un impact significatif sur la théorie des équations aux dérivées partielles. « Il y avait un noyau de belles idées géométriques dans ces travaux classiques et, une fois passé le langage et les notations démodés, une pertinence extraordinaire pour les problèmes modernes », a déclaré Mark Green de l'université de Californie à Los Angeles qui présentera l'éloge de Griffiths. « Griffiths croyait fermement au pouvoir des idées géométriques profondes et il encourageait ses étudiants à s'intéresser à ces livres et documents classiques. »

Quatre volumes des œuvres choisies de Griffiths ont été publiés : géométrie analytique, géométrie algébrique, variantes des structures de Hodge et systèmes différentiels. Il y a également suffisamment de matière pour un cinquième volume, qui est en cours de préparation. Cette production stupéfiante couvre une énorme variété de sujets. Néanmoins, on peut toujours percevoir certaines idées géométriques unificatrices et puissantes qui traversent son travail. Un exemple peut servir à illustrer la nature de ces idées. On fait une distinction fondamentale en mathématiques entre les fonctions algébriques, telles que la racine carrée de $x$, et les fonctions transcendantes, telles que le sinus et le cosinus, qui ne peuvent pas être exprimées algébriquement. Au cours du XIXe siècle, la géométrie algébrique a compris que les objets décrits en termes d'équations algébriques pouvaient être étudiés de manière productive à l'aide de fonctions transcendantes, ce qui a donné naissance à la géométrie algébrique transcendante. Pour les courbes algébriques dans le plan, un aspect de ces méthodes transcendantes a été incorporé

dans une construction connue sous le nom d'application des périodes. Cependant, lorsque l'on va au-delà des courbes et que l'on passe à des dimensions supérieures, on assiste à des phénomènes véritablement nouveaux que personne n'avait anticipés avant les travaux de Griffiths. Il a trouvé un moyen innovant de combiner les méthodes modernes, telles que la théorie des déformations et la théorie de Hodge, avec le cadre classique.

Non loin de ces développements se trouve l'un des défis majeurs des mathématiques, la conjecture de Hodge, qui a été désignée comme l'un des problèmes du prix du millénaire de l'institut de mathématiques Clay, doté d'un million de dollars. W. D. V. Hodge (1903-1975) a remarqué qu'à certains objets de la géométrie algébrique, à savoir les cycles, on peut associer un type particulier d'objet en topologie, une « classe de Hodge ». La conjecture de Hodge pose la question de savoir s'il est possible d'inverser cette association : peut-on prendre une classe de Hodge et trouver un cycle à coefficients rationnels auquel elle est associée ? Bien que personne n'ait encore démontré la conjecture de Hodge, les travaux de Griffiths ont permis de mettre en lumière les contours de ce problème et d'orienter une grande partie des recherches qui y ont été consacrées.

On classe souvent les mathématiciens dans les catégories « résolution de problèmes » ou « élaboration de théories ». Griffiths n'entre dans aucune de ces deux catégories. C'est un « interprète », selon Bryant. « Il veut comprendre où une idée peut aller, ses connexions avec d'autres idées, et comment elle peut éclairer un problème qu'il étudie. » Cette volonté de comprendre a fait de Griffiths un excellent communicant, non seulement auprès de ses collègues chercheurs, mais aussi auprès des étudiants. Il a eu 29 doctorants, dont beaucoup ont fait une carrière exceptionnelle. Au total, il a environ 460 « descendants » doctorants. Les écrits mathématiques de Griffiths sont réputés pour leur clarté et leur rigueur, ainsi que pour la manière dont ils ouvrent de nouvelles voies de recherche. Un exemple marquant est son article intitulé « Périodes d'intégrales sur des variétés algébriques », publié dans le *Bulletin* de la Société mathématique américaine en 1970 et qui a reçu le prix Steele l'année suivante. Ses livres ont également eu une grande influence, en particulier ses *Principes de géométrie algébrique*, écrit avec son ancien doctorant Joseph Harris. Universellement connu sous le nom abrégé de « Griffiths et Harris », ce manuel est devenu une référence standard pour des générations d'étudiants.

Après avoir obtenu une bourse Miller à l'université de Berkeley,

Griffiths est devenu membre du corps enseignant de cette université. En 1967, il s'est installé à l'université de Princeton et en 1972 à Harvard. Sa nomination en 1983 au poste de doyen de l'université Duke a marqué le début de son travail administratif, qui étonnamment n'a pas du tout ralenti ses travaux de recherche. En 1991, il est devenu directeur de l'Institut d'étude avancée à Princeton, l'un des plus importants centres de recherche au monde, en particulier dans les domaines des mathématiques et de la physique théorique. Sous sa direction pendant douze ans, l'institut a lancé plusieurs nouvelles initiatives, notamment des programmes en informatique théorique et en biologie théorique. C'est également à cette époque que trois nouveaux bâtiments ont été construits, parmi lesquels le bâtiment Simonyi qui abrite aujourd'hui le département de mathématiques de l'institut.

Griffiths a été très sollicité pour ses conseils avisés en matière de politique scientifique et éducative. Comme l'a dit Green, « tout le monde lui fait confiance pour être juste et judicieux ». L'un des rôles les plus importants de Griffiths a été celui de président du Comité sur la science, l'ingénierie et la politique publique des académies nationales des États-Unis de 1992 à 1999. Au cours de cette période, le comité a publié deux rapports particulièrement influents, l'un sur la refonte des études supérieures en sciences et en ingénierie, l'autre sur les différentes facettes d'un mentor efficace dans ces domaines. Griffiths a également siégé au Conseil national des sciences, l'organe de décision de la Fondation nationale pour la science (1991-1996). Il a été secrétaire de l'Union mathématique internationale (1999-2006).

Alors qu'il était directeur de l'Institut d'étude avancée, Griffiths a fait la connaissance de James Wolfensohn, président de la Banque mondiale, qui était à l'époque membre du conseil d'administration de l'institut. Inspiré par ce contact, Griffiths a lancé le Groupe d'initiatives pour la science, une équipe internationale de scientifiques de premier plan qui vise à aider les pays en voie de développement à renforcer leurs capacités scientifiques. Plutôt que d'imposer des objectifs et des cadres de travail de l'extérieur, le groupe aide les scientifiques nés dans le pays à identifier les besoins nationaux essentiels et à mettre en place l'infrastructure d'enseignement et de recherche nécessaire pour y répondre. La première initiative a été l'« Initiative du millénaire pour la science », un programme de recherche et d'éducation financé principalement par la Banque mondiale et destiné aux pays en voie de développement d'Afrique, d'Asie et d'Amérique latine. Fort de cette expérience, le groupe a lancé l'« Initiative régionale pour la

science et l'éducation », financée par la fondation Carnegie de New York et gérée conjointement par le groupe et l'Académie africaine des sciences. L'initiative soutient les réseaux universitaires de recherche et de formation en Afrique subsaharienne, dans le but de préparer des scientifiques et des ingénieurs au niveau du doctorat. Elle a mis l'accent sur la participation des femmes africaines, qui ont longtemps été sous-représentées dans les sciences.

À 76 ans, Griffiths ne montre aucun signe de ralentissement. Aujourd'hui professeur émérite à l'Institut d'étude avancée, il reste très impliqué dans le Groupe d'initiatives pour la science. Au cours de l'année écoulée, il s'est associé à d'autres personnalités américaines du monde des mathématiques et des sciences dans le cadre d'un programme visant à apporter des changements constructifs dans l'enseignement des mathématiques après le secondaire. Et il continue à faire de la recherche : son article le plus récent, rédigé avec Mark Green, a été publié sur le serveur de prépublication arXiv en mai 2014. Avec son œuvre de recherche remarquable en mathématiques, son impact profond sur les jeunes dans le domaine et ses contributions au soutien de la recherche et de l'éducation dans le monde entier, Griffiths est une source d'inspiration pour beaucoup, mais pas quelqu'un qui est facilement imitable, comme le remarque Green. Pour mener à bien autant de projets que Griffiths, « nous autres aurions besoin d'heures supplémentaires dans la journée ».

**Bibliographie**


— Charles (François), « Progrès récents sur les fonctions normales [d'après Green-Griffiths, Brosnan-Pearlstein, M. Saito, Schnell...] », Séminaire Bourbaki, exposé n° 1063, 2013.
— Ghys (Étienne), « Phillip Griffiths, médaille Chern 2014, *Images des mathématiques*, 2014.

# Prix Nevanlinna : Subhash Khot

> « pour sa définition prémonitoire du problème des « jeux uniques », et pour avoir dirigé les efforts visant à comprendre sa complexité et son rôle essentiel dans l'étude de l'approximation efficace des problèmes d'optimisation ; ses travaux ont conduit à des percées dans la conception d'algorithmes et sur la difficulté d'approximation, ainsi qu'à de nouvelles interactions passionnantes entre la complexité, l'analyse et la géométrie. »

Subhash Khot a défini les « jeux uniques » en 2002 et a ensuite mené les efforts pour comprendre leur complexité et leur rôle central dans l'étude des problèmes d'optimisation. Khot et ses collaborateurs ont démontré que la difficulté des jeux uniques implique une caractérisation précise des meilleurs facteurs d'approximation réalisables pour un certain nombre de problèmes d'optimisation NP-difficiles. Cette découverte a fait du problème des jeux uniques un problème ouvert majeur de la théorie du calcul.

La quête actuelle pour étudier sa complexité a eu des retombées inattendues. Tout d'abord, les réductions utilisées dans les résultats ci-dessus ont permis d'identifier de nouveaux problèmes en analyse et en géométrie, revigorant l'analyse des fonctions booléennes, un domaine à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Cela a conduit à de nouveaux théorèmes centraux limites, de nouveaux principes d'invariance, de nouvelles inégalités isopérimétriques et de nouveaux théorèmes d'inversion, qui ont eu un impact sur la recherche dans les domaines de la complexité informatique, du pseudo-aléatoire, de l'apprentissage et de la combinatoire. Deuxièmement, Khot et ses collaborateurs ont utilisé les intuitions issues de leur étude des jeux uniques pour obtenir de nouvelles bornes inférieures sur la distorsion subie lors du plongement d'un espace métrique dans un autre, ainsi que des constructions de familles de cas difficiles pour des algorithmes courants d'optimisation linéaire ou semi-définie. Cela a inspiré de nouveaux travaux de conception d'algorithmes qui étendent ces méthodes, enrichissant considérablement la théorie des algorithmes et ses applications.

**Vulgarisation**

En règle générale, les grands prix de mathématiques sont décernés pour des résultats majeurs. Mais dans le cas présent, Subhash Khot reçoit le prix Nevanlinna en grande partie pour une conjecture, et plus surprenant encore pour une conjecture dont les experts ne sont pas tout à fait convaincus de sa véracité.

Mais la conjecture des jeux uniques de Khot a déjà largement prouvé sa valeur même si elle devait finalement être réfutée. Elle a jeté une lumière vive sur des domaines auparavant obscurs de la complexité informatique et a apporté un éclairage essentiel. De plus, Khot l'a également utilisée pour démontrer des résultats majeurs, qui restent valables indépendamment de la véracité de la conjecture.

Cette conjecture a permis d'aborder de manière particulièrement fructueuse la question centrale du domaine de la complexité informatique : quelle est la difficulté des problèmes à résoudre ? Plus précisément, si vous trouviez la manière la plus intelligente de résoudre un problème particulier, à quelle vitesse un ordinateur pourrait-il trouver la réponse en l'utilisant ?

Les informaticiens sont presque sûrs que certains problèmes sont si difficiles que les ordinateurs ne peuvent pas trouver la réponse de manière fiable, du moins pas dans un délai raisonnable (par exemple, avant la fin de l'Univers). Il s'agit de la célèbre conjecture connue sous le nom $P \neq NP$, qui résiste à toute démonstration depuis quatre décennies, bien que les informaticiens soient devenus de plus en plus convaincus au fil du temps qu'elle devait être vraie.

C'est pourquoi de nombreux chercheurs sont passés à la question suivante : si un problème est trop difficile à résoudre rapidement et précisément pour un ordinateur, peut-il au moins en trouver une bonne approximation ? Dans le monde réel après tout, une bonne approximation est généralement suffisante.

Avant les travaux de Khot, les chercheurs avaient trouvé quelques problèmes pour lesquels la réponse était négative, mais pour la plupart des problèmes, ils n'avaient aucune idée. Khot a trouvé un problème remarquablement simple (appelé problème des jeux uniques) qui semble résumer ce qui rend de nombreux problèmes difficiles à résoudre, même approximativement, en un temps raisonnable. Sa conjecture est qu'il n'est pas seulement difficile, mais impossible de trouver de manière fiable une réponse approximative au problème des jeux uniques dans un délai raisonnable. D'un certain point de vue technique et précis, le

problème des jeux uniques semble être le problème le plus simple qui soit vraiment très difficile à résoudre.

Qu'il ait raison ou tort, son problème a « divisé la nature selon ses articulations », comme disait le taxonomiste Carl von Linné. La conjecture s'avère être une sorte de point de levier, un endroit où l'effort produit de grands résultats. En supposant que la conjecture soit vraie, Khot et d'autres ont montré que la grande majorité des problèmes auxquels s'intéressent les informaticiens ne peuvent pas non plus faire l'objet d'une approximation. En outre, la conjecture a permis de jeter une lumière sur des problèmes apparemment sans rapport dans les domaines de la géométrie, de l'analyse harmonique et même pour les mathématiques des « mousses » et des votes. Ces résultats ne dépendent pas de la véracité de la conjecture.

Le problème des jeux uniques est une élaboration d'un problème auquel un enfant de six ans pourrait jouer. Imaginez que vous disposiez d'une boîte de crayons de couleur et d'un dessin qui représente un tas de bulles, dont certaines sont reliées entre elles par des lignes (les informaticiens appellent ces dessins des « graphes »). Pouvez-vous trouver un moyen efficace de colorier les bulles de sorte que deux bulles reliées soient toujours de couleurs différentes ?

Si votre boîte ne contient que deux crayons (jaune et violet par exemple), vous pouvez résoudre ce problème de manière assez efficace. Commencez par une bulle arbitraire et coloriez-la en jaune. Puisque toutes les bulles qui lui sont reliées doivent maintenant être violettes, coloriez-les. Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez réussi à colorier tout le graphe ou que vous ayez trouvé une bulle reliée à la fois à une bulle jaune et à une bulle violette, ce qui rend le projet impossible.

Cependant, si vous ajoutez un seul crayon supplémentaire, cette méthode échoue, car lorsque vous coloriez la première bulle en jaune, vous ne savez pas de quelle couleur doivent être les bulles reliées. Par conséquent, si vous arrivez à une bulle que vous ne pouvez pas colorier sans enfreindre les règles, vous ne savez pas si une sélection différente plus tôt aurait permis de résoudre le problème. La difficulté ne réside pas seulement dans cette méthode : aucune autre méthode ne permet de résoudre le problème de manière fiable et efficace. On a démontré que le problème est NP-difficile, en d'autres termes, qu'il est effectivement impossible à résoudre.

Khot a légèrement modifié ce problème. Il l'a rendu plus facile que le problème ordinaire des trois crayons en prévoyant une règle selon laquelle, chaque fois qu'une bulle est coloriée, la couleur de toutes les

bulles reliées est fixée. Un algorithme comme le précédent s'applique alors et il est assez facile de déterminer si le graphe peut être colorié sans enfreindre les règles. Mais pour les graphes qui sont des ratés, ceux qui ne peuvent pas être coloriés, Khot a posé la question suivante : quel coloriage enfreint le moins de règles possible ?

La conjecture des jeux uniques stipule que si vous disposez de nombreuses couleurs, vous ne trouverez jamais de méthode efficace pour colorier le dessin qui soit proche de la meilleure, quelle que soit votre ingéniosité.

Khot a formulé cette conjecture en 2001 (dans une formulation légèrement différente, qui a donné son nom à la conjecture). Quelques années plus tard, les informaticiens ont eu un premier aperçu de son importance, lorsque Khot et d'autres ont découvert que si la conjecture était vraie, alors ils pouvaient trouver des limites précises sur la façon dont de nombreux autres problèmes pouvaient être approchés.

En voici un. Imaginez qu'à l'occasion d'une soirée très courue, les invités cherchent les vedettes pour leur serrer la main, alors que les personnes qui ne sont pas des célébrités ne se serrent pas la main entre elles. Si vous savez seulement qui a serré la main de qui, pouvez-vous déterminer le nombre minimum de célébrités qui ont pu assister à la fête ? Un algorithme simple peut trouver une solution approchée à cette question, mais il peut donner jusqu'à deux fois plus de célébrités qu'il n'y en a réellement. Les informaticiens ont longtemps imaginé que l'on pouvait faire mieux avec un algorithme plus sophistiqué. Mais en 2003, Khot et Oded Regev ont montré que si la conjecture des jeux unique était vraie, ces informaticiens avaient tort. Ce simple algorithme est ce qu'il y a de mieux à faire.

Le succès suivant de Khot est survenu en 2005. Avec Ryan O'Donnell, Elchanan Mossel et Guy Kindler, Khot a découvert que la conjecture des jeux uniques impliquait une limite similaire pour l'approximation des solutions d'un problème appelé « coupe maximale », qui vous demande de prendre un graphe et de le diviser en deux groupes de manière à ce qu'un nombre maximum d'arêtes passent entre eux. Puis en 2008, Prasad Raghavendra a montré que si la conjecture des jeux uniques était vraie, une méthode très simple pourrait trouver les meilleures approximations pour une énorme classe de problèmes appelés « problèmes de satisfaction de contraintes ». Grâce à cette méthode, les informaticiens savent exactement dans quelle mesure presque tous les problèmes peuvent être approchés.

Bien entendu, tous ces résultats dépendent de la véracité de la

conjecture des jeux uniques. S'il s'avère qu'elle est fausse, toute cette belle théorie étincelante n'aura été qu'un mirage.

Mais la conjecture s'est révélée remarquablement puissante, indépendamment de sa véracité. En utilisant la conjecture des jeux uniques pour découvrir dans quelle mesure d'autres problèmes pouvaient être approchés, Khot et d'autres ont démontré plusieurs théorèmes importants dans d'autres domaines, notamment en géométrie et en analyse harmonique.

Ces implications se sont même étendues jusqu'à la théorie du vote. Une fois que tous les votes d'une élection ont été exprimés, il y a plusieurs façons de déterminer le vainqueur. L'une des plus évidentes est que l'élection revient au candidat ayant obtenu la majorité des voix, mais il existe également d'autres choix, comme le système américain du collège électoral. Khot et ses coauteurs ont utilisé l'intuition de la conjecture des jeux uniques pour proposer que la règle de la majorité soit la méthode de comptage des votes dans laquelle quelques votes mal comptés sont le moins susceptibles de modifier le résultat de l'élection. Cette hypothèse a été confirmée ultérieurement par d'autres.

Un autre groupe s'est efforcé de démontrer que la conjecture des jeux uniques était vraie. Bien que leur méthode ait échoué, leurs travaux les ont conduits à une autre découverte : ils ont trouvé une forme qui se situe en un certain sens à mi-chemin entre le carré et le cercle (bien que dans beaucoup plus que deux dimensions). Comme un carré, les copies de cette forme peuvent être placées les unes à côté des autres horizontalement et verticalement pour remplir tout un espace sans vide ni chevauchement, formant ainsi une « mousse » multidimensionnelle. Mais le périmètre de cette forme est beaucoup plus petit que celui d'un carré ; il est plus proche de celui d'un cercle, l'objet qui a le plus petit périmètre pour la surface qu'il contient.

Entre-temps, d'autres chercheurs se sont efforcés de démontrer que la conjecture des jeux uniques était fausse, avec le même manque de succès direct, mais avec les mêmes avantages collatéraux. Bien qu'ils n'aient pas encore réussi à imaginer un algorithme capable de trouver efficacement une bonne solution approchée au problème des jeux uniques, ils ont développé d'excellentes nouvelles méthodes algorithmiques pour d'autres circonstances.

Les efforts déployés pour démontrer ou réfuter la conjecture et découvrir ses conséquences se sont tous révélés extrêmement fructueux. La conjecture des jeux uniques sera un moteur de la recherche en informatique théorique pendant de nombreuses années.

**Bibliographie**

— Ghys (Étienne), « Subhash Khot, prix Nevanlinna 2014 », *Images des mathématiques*, 2014.
— Pansu (Pierre), « Difficulté d'approximation [d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell...] », Séminaire Bourbaki, 2011, exposé n° 1045.

# Prix Līlāvatī : Adrián Paenza

> « pour sa contribution décisive à l'évolution de l'esprit de tout un pays quant à la manière dont il perçoit les mathématiques dans la vie quotidienne, en particulier à travers ses livres et ses émissions de télévision, et pour son enthousiasme et sa passion dans la communication de la beauté et de la joie des mathématiques ».

Très jeune, Adrián Paenza a obtenu un doctorat en mathématiques et a enseigné à l'université de Buenos Aires entre 1979 et 2002. Pendant de nombreuses années, il a mené une vie parallèle en tant que journaliste sportif à la télévision et journaliste politique. Depuis 2003, il a trouvé un moyen d'intégrer sa formation mathématique à son expérience journalistique. Il a entamé une brillante carrière de journaliste scientifique :

— Il a été l'animateur de l'émission télévisée hebdomadaire à succès *Científicos Industria Argentina* (« Scientifiques d'Argentine »), qui en est actuellement à sa douzième saison consécutive sur une chaîne de télévision généraliste. Chaque émission, dotée d'une interface belle et attrayante, consiste en des entretiens avec des mathématiciens et des scientifiques de disciplines très différentes, et se termine par un problème mathématique dont la solution est donnée dans l'émission suivante.

— Il a également animé l'émission télévisée *Alterados por Pi* (« Altérés par pi »), une émission hebdomadaire d'une demi-heure exclusivement consacrée à la vulgarisation des mathématiques. L'émission est enregistrée devant un public dans différentes écoles publiques du pays.

— Depuis 2005, il rédige une chronique hebdomadaire sur la science en général mais surtout sur les mathématiques en dernière page de *Página 12*, l'un des trois journaux nationaux d'Argentine. Ses articles comprennent des notes historiques, des accroches et même des démonstrations de théorèmes.

— Il a écrit huit livres consacrés à la vulgarisation des mathématiques : cinq sous le titre *Matemática...¿estás ahí?* (« Les mathématiques... êtes-vous là ? »), publiés par *Siglo XXI Editores*, qui se sont vendus à plus d'un million d'exemplaires. Le premier

de la série, publié en septembre 2005, a figuré en tête des ventes de livres pendant 73 semaines consécutives, un record, et en est aujourd'hui à sa 22e édition. L'impact et l'influence énormes de ces livres se sont étendus au-delà de l'Amérique latine et de l'Espagne ; ils ont été publiés au Portugal, en Italie, en République tchèque, en Allemagne, et ont récemment été traduits en chinois pour une prochaine édition.

Il est remarquable que, grâce à sa générosité personnelle, tous ses livres aient été mis gratuitement en ligne sur le site du département de mathématiques de l'université de Buenos Aires dès le premier jour de leur publication et de leur vente.

Paenza a également toujours été un défenseur de l'enseignement public et gratuit. Il a lancé l'idée (qui a ensuite été mise en œuvre par le ministre argentin de l'éducation) de développer un programme fédéral d'alphabétisation numérique, inspiré du programme « Un ordinateur portable par enfant ». Ses livres sont distribués gratuitement dans ces ordinateurs portables.

Nicholas Negroponte a déclaré à propos de sa nomination :

> « Je connais très bien Adrián et son travail. Il est une source d'inspiration et un héros pour les mathématiques. Sa présence aux États-Unis et en Argentine a inspiré de nombreux jeunes gens, sans parler de l'ensemble du monde hispanophone. Je ne peux pas imaginer une nomination plus qualifiée. »

Et John Sulston a déclaré :

> « Je suis ravi qu'Adrián Paenza soit nommé pour ce prix. Il est clair d'après son dossier qu'il a une portée et un champ d'action énormes, et qu'il est largement apprécié pour ses présentations lucides. Il s'est intéressé de près non seulement à la science, mais aussi à l'insistance de mes collègues et de moi-même sur la publication ouverte des données. C'est un thème sur lequel il est revenu à de nombreuses reprises, en défendant l'importance de l'éducation publique et gratuite pour tous, sans restriction de coût. Lui et moi avons donc trouvé une passion commune au cours de nos conversations et j'admire beaucoup le travail qu'il a accompli. Je pense qu'Adrián est un excellent candidat pour le prix Līlāvatī. »

# Le congrès de 2018

# Médaille Fields : Caucher Birkar

> « pour sa démonstration bornant l'ensemble des variétés de Fano et pour des contributions au programme des modèles minimaux ».

Caucher Birkar a apporté des contributions fondamentales à la géométrie birationnelle dans deux domaines particuliers : le programme des modèles minimaux (PMM) et le caractère borné de l'ensemble des variétés de Fano. Le PMM original implique deux types de variétés projectives Y avec des singularités dites terminales dont les diviseurs canoniques K ont des propriétés opposées : pour un modèle minimal, K est positif sur les courbes de Y ; tandis que pour une fibration de Fano, Y a un morphisme surjectif sur une variété projective de dimension inférieure tel que -K soit ample relativement à Y. Le PMM tente de construire pour chaque variété projective lisse une application birationnelle vers un modèle minimal ou une fibration de Fano.

Bien que le PMM ne soit pas toujours connu pour fonctionner, Birkar, conjointement avec Cascini, Hacon et McKernan, a apporté une contribution étonnante ; une version spéciale du PMM fonctionne pour les variétés complexes de dimension arbitraire dont le diviseur canonique est soit grand, soit non pseudo-effectif, une situation qui couvre de nombreux cas importants. Ils ont en fait établi le PMM pour une classe plus large de singularités, ce qui était essentiel pour la récurrence sur la dimension dans la démonstration, et cela implique de nombreuses conséquences importantes telles que le caractère finiment engendré d'anneaux canoniques de variétés projectives lisses arbitraires. Le PMM est aujourd'hui un outil fondamental qui est largement utilisé.

C'est Birkar qui a ensuite démontré que les variétés de Fano complexes (c'est-à-dire les fibrations de Fano sur un point) de dimension fixe arbitraire avec des singularités terminales sont paramétrées par une variété algébrique (éventuellement réductible). Comme ces variétés de Fano constituent l'un des principaux résultats du PMM appliqué aux variétés projectives lisses, leur caractère borné, auparavant considéré comme inaccessible, est d'une importance fondamentale. Birkar a résolu la conjecture plus générale de Borisov-Alexeev-Borisov en s'appuyant sur des résultats de Hacon, McKernan, Xu et d'autres. La bornitude de Birkar sera cruciale en tant que paradigme pour le PMM complet.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

Caucher Birkar est un mathématicien d'une grande originalité et d'une grande profondeur. Son domaine de recherche, la géométrie algébrique, aborde des questions fondamentales sur la nature des espaces géométriques abstraits. Ces questions peuvent souvent être énoncées très simplement, mais leur résolution nécessite l'utilisation d'un énorme appareil technique. Non seulement Birkar maîtrise parfaitement cet appareil, mais il possède également une profonde intuition géométrique qui lui permet d'aller au-delà des réalisations techniques et d'innover sur le plan conceptuel. Son travail a permis des avancées majeures en géométrie birationnelle, en particulier dans un paradigme central connu sous le nom de programme des modèles minimaux.

En géométrie algébrique, l'objet d'étude de base, appelé variété algébrique, est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales. L'ensemble des solutions peut prendre différentes formes selon le domaine des variables dans les équations. Considérons par exemple l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Si $x$, $y$ et $z$ sont des entiers, l'ensemble des solutions est l'ensemble des triplets pythagoriciens. Si $x$, $y$ et $z$ sont des nombres réels, l'ensemble solution est un cône dans l'espace tridimensionnel. Si $x$, $y$ et $z$ sont des nombres complexes, il n'est pas possible de visualiser directement l'ensemble solution ; il s'agit d'un espace abstrait qui hérite de la structure géométrique des nombres complexes.

Parce que cette structure géométrique apporte richesse et flexibilité, les spécialistes de la géométrie algébrique se concentrent généralement sur les variétés algébriques complexes. Ces variétés présentent une grande diversité, mais on peut également percevoir des similitudes que certaines variétés partagent. L'objectif principal de la géométrie birationnelle est de fournir un bon moyen de classer toutes les variétés algébriques complexes à équivalence birationnelle près. Dans la poursuite de cet objectif, le programme des modèles minimaux (PMM) propose un moyen d'identifier des variétés spéciales dans chaque classe qui sont d'une certaine manière les plus simples et qui fournissent des blocs de construction à partir desquels on peut construire d'autres variétés plus compliquées.

Les origines de la classification birationnelle remontent aux travaux du grand géomètre du XIXe siècle Bernhard Riemann, qui a étudié le cas des variétés complexes unidimensionnelles. À toute variété de ce type, on peut associer une surface de Riemann, qui est une surface réelle de

dimension 2 dotée d'une structure géométrique supplémentaire héritée des nombres complexes. Ces surfaces sont de trois types différents : celles à courbure positive, comme une sphère ; celles à courbure nulle, comme un beignet avec un trou ; et celles à courbure négative, comme un beignet avec plusieurs trous. Le nombre de trous constitue un invariant naturel pour la classification des variétés unidimensionnelles.

Les variétés de dimension 2 ont fait l'objet de nombreuses recherches de la part de géomètres algébristes italiens au début du XXe siècle. Ils ont largement utilisé le concept de birationalité : lorsque deux variétés sont équivalentes d'un point de vue birationnel, elles sont essentiellement identiques, à l'exception de quelques petits sous-ensembles qui peuvent être ignorés sans risque. L'équivalence birationnelle offre un moyen souple de classer les variétés. Les géomètres italiens ont découvert qu'il était possible de compliquer une variété complexe de dimension 2 en éclatant un point en un type spécial de courbe appelé « courbe d'auto-intersection −1 ». On peut également inverser la procédure et simplifier la variété en contractant une courbe d'auto-intersection −1 sur un point. Le fait d'éclater ou de contracter une variété donne une nouvelle variété dans la même classe d'équivalence birationnelle. En répétant la procédure de contraction autant de fois que possible, on obtient une variété particulièrement simple.

Comme dans le cas unidimensionnel, ces variétés bidimensionnelles simples se répartissent en trois catégories. La première, appelée aujourd'hui espaces fibrés de Mori-Fano, est construite à partir des variétés de Fano ; ces variétés sont une généralisation naturelle de la sphère de Riemann qui a une courbure positive. La deuxième catégorie, appelée espaces fibrés de Calabi-Yau, est construite à partir de variétés de Calabi-Yau ; ces variétés sont une généralisation naturelle du beignet à un trou dont la courbure est nulle. La troisième catégorie, appelée variétés de type général, est une généralisation naturelle d'une surface de Riemann à courbure négative, c'est-à-dire d'une surface comportant au moins deux trous.

Les méthodes mises au point pour traiter les variétés bidimensionnelles ne permettent pas de résoudre le cas tridimensionnel. Une nouvelle approche était nécessaire. Celle-ci est apparue dans les années soixante-dix et quatre-vingt dans les travaux de Shigefumi Mori. Les courbes d'auto-intersection −1 n'existant pas en dimension 3, il a dû mettre au point une procédure de réduction entièrement nouvelle. Cette nouvelle procédure a produit des singularités, c'est-à-dire des points de la variété qui ne sont pas lisses. Les nouvelles avancées de la théorie

des singularités ont permis de traiter certains cas, mais d'autres ont nécessité l'utilisation d'un nouvel outil appelé *flip*. Intuitivement, il s'agit d'un processus par lequel on découpe une région, on la retourne et on la recolle. La démonstration par Mori de l'existence de *flips* en dimension 3 a été la clé de l'établissement du programme des modèles minimaux en tant que moyen de classification des variétés. Ses travaux lui ont valu la médaille Fields en 1990.

Au niveau le plus grossier, la classification des variétés de dimension 3 présente le même motif que dans le cas de la dimension 2, en ce sens que les variétés particulièrement simples se répartissent en trois catégories : les espaces fibrés de Fano-Mori, les espaces fibrés de Calabi-Yau et les variétés de type général. Cependant, la classification plus fine au sein de chaque groupe est beaucoup plus compliquée en dimension 3 qu'en dimension 2, car les variétés de dimension 3 sont intrinsèquement plus compliquées que les variétés de dimension 2. Les variétés de type espaces fibrés de Calabi-Yau et les variétés de type général sont appelées « modèles minimaux » dans la terminologie du programme.

Au cours des années quatre-vingt et quatre-vingt-dix, plusieurs mathématiciens, notamment Vyacheslav V. Shokurov, ont développé une forme plus générale du PMM, appelée log-PMM, dans laquelle chaque variété est appariée à une collection de variétés d'une dimension inférieure. Il s'avère que l'étude de ces paires ajoute une puissante flexibilité qui peut être exploitée dans de nombreuses démonstrations. Ces développements ont fait naître l'espoir que, malgré des défis techniques considérables, le PMM pourrait être étendu à des dimensions supérieures à trois. Parmi les défis les plus difficiles à relever, citons le traitement des singularités et la démonstration de l'existence de *flips* dans les dimensions supérieures. Ce dernier point est devenu un problème ouvert majeur de la géométrie algébrique.

Une avancée majeure a été réalisée en 2003 dans un article de Shokurov, qui a développé certains de ses travaux antérieurs sur les *flips* en dimension 3, pour établir l'existence de *flips* en dimension 4. Plus que ce résultat spécifique, c'est la nouvelle philosophie que Shokurov a exposée pour aborder le PMM dans les dimensions supérieures qui est importante. Contrairement à l'approche concrète et géométrique de Mori, le travail de Shokurov était beaucoup plus algébrique, s'appuyant sur des idées issues de branches très abstraites des mathématiques telles que la théorie de la cohomologie.

En tant que doctorant de Shokurov, Caucher Birkar a absorbé

et affiné la nouvelle philosophie tout en maîtrisant la formidable machinerie technique requise. En 2006, deux ans après avoir obtenu son doctorat, Birkar a réalisé une percée majeure en collaboration avec trois autres mathématiciens. L'article qu'ils ont rédigé est aujourd'hui universellement connu sous le nom de BCHM, pour les noms de famille des quatre auteurs : Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon et James McKernan.

L'un des principaux résultats de BCHM concerne le fibré canonique, qui est une construction au centre de la géométrie birationnelle. Défini en tout point d'une variété, le fibré canonique intègre de manière particulièrement utile un grand nombre d'informations géométriques sur la variété. En prenant les sections du fibré canonique et ses puissances, on obtient un objet algébrique appelé anneau canonique. BCHM a répondu par l'affirmative à la question ancienne de savoir si l'anneau canonique est de type fini. Une version locale de ce résultat, également démontrée dans BCHM, a permis aux auteurs d'établir l'existence de *flips* dans toutes les dimensions supérieures à deux. Ils ont ensuite pu démontrer l'existence de modèles minimaux pour les variétés de type général.

BCHM a changé le paysage de la recherche en géométrie birationnelle en ouvrant des domaines que l'on pensait auparavant inaccessibles. Les outils et les perspectives introduits dans l'article ont été largement utilisés et ont eu un impact énorme. Pourtant, de nombreux mystères subsistent, notamment en ce qui concerne les variétés autres que celles de type général.

C'est donc avec beaucoup d'enthousiasme que le monde mathématique a accueilli en 2016 deux articles de Birkar portant sur le cas des variétés de Fano. Le point culminant de ce tour de force est la démonstration par Birkar de la conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov, qui prédisait que, sous des hypothèses raisonnables, les variétés de Fano forment une famille bornée. Plus précisément, Birkar a montré qu'en toute dimension fixée, les variétés de Fano qui présentent des singularités faibles peuvent être indexées à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Les articles de Birkar contiennent également des avancées spectaculaires dans le traitement de certains types de singularités qui apparaissent dans le PMM. On s'attend à ce que ces travaux aboutissent rapidement à la résolution de nombreux problèmes en suspens dans le domaine de la géométrie birationnelle. Des séminaires et des ateliers ont été organisés dans le monde entier pour permettre aux mathématiciens d'étudier et d'assimiler les travaux de Birkar.

Le PMM n'a pas encore été complètement établi dans toutes les

dimensions. En particulier, le cas des variétés de dimension supérieure dont on prédit qu'elles ont des espaces fibrés de Calabi-Yau comme modèles minimaux reste mystérieux. Les travaux de Birkar ne manqueront pas de guider et d'inspirer de nouveaux développements.

Le PMM, tel qu'il a été discuté jusqu'à présent, concerne les variétés pour lesquelles les variables des polynômes de définition varient sur les nombres complexes. Le cas où les variables appartiennent à d'autres ensembles de nombres constitue une nouvelle frontière. Par exemple, étant donné l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, ...p - 1\}$, où $p$ est un nombre premier, on peut définir les opérations arithmétiques comme étant l'addition et la multiplication modulo $p$ (ce qui est analogue à « l'arithmétique de l'horloge »). Cet ensemble, ainsi que ces opérations, est appelé un corps de caractéristique $p$. Étant donné un ensemble de polynômes, on peut permettre aux variables d'être dans un corps de caractéristique $p$.

Les variétés en caractéristique $p$ sont d'un grand intérêt, car elles ont de nombreux liens avec la théorie des nombres, de sorte que leur classification birationnelle serait très utile. On s'attend à ce que cette classification ait une certaine ressemblance avec celle sur les nombres complexes. Cependant, de nombreux outils développés pour le cas complexe ne s'appliquent tout simplement pas à la caractéristique $p$, de sorte qu'une approche entièrement nouvelle est nécessaire. Birkar s'est plongé dans ce domaine en plein essor et a apporté plusieurs contributions significatives. En particulier, en s'appuyant sur les travaux de Christopher Hacon et Chenyang Xu, Birkar a démontré l'existence de log-*flips* et de log-modèles minimaux pour les variétés de dimension 3 sur un corps de caractéristique $p$ lorsque $p > 5$.

Avec un goût prononcé pour les problèmes profonds et fondamentaux qui sont au cœur de la géométrie algébrique, Birkar s'est imposé comme un nouveau maître dans ce domaine. Il possède non seulement une grande facilité avec les outils les plus récents à la frontière de ce sujet hautement technique, mais il a également créé certaines des innovations les plus puissantes. Il apporte à ce travail une forte intuition géométrique ainsi qu'une intrépidité à s'attaquer à des problèmes difficiles et anciens. Caucher Birkar est prêt à apporter d'autres contributions exceptionnelles aux mathématiques.

**Bibliographie**

— « Entretien avec Caucher Birkar », *Gazette des mathématiciens*, 2019, n° 159, p. 47-49.

— Blanc (Jérémy), « MMP et variétés de Fano, le travail de Caucher Birkar », *Gazette des mathématiciens*, 2019, nº 162, p. 39-46.
— Druel (Stéphane), « Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général [d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan] », Séminaire Bourbaki, 2009, exposé nº 982.

# Médaille Fields : Alessio Figalli

> « pour ses contributions à la théorie du transport optimal et ses applications aux équations aux dérivées partielles, à la géométrie métrique et à la théorie des probabilités. »

Alessio Figalli a permis de nombreuses avancées fondamentales dans la théorie du transport optimal, tout en appliquant cette théorie de manière novatrice à d'autres domaines des mathématiques. Seuls quelques-uns de ses nombreux résultats dans ces domaines sont décrits ici.

Le travail conjoint entre Figalli et De Philippis sur la régularité de l'équation de Monge-Ampère est un résultat révolutionnaire qui comble le fossé entre les estimations du gradient découvertes par Caffarelli et la régularité complète de Sobolev des dérivées secondes de la solution convexe de l'équation de Monge-Ampère avec un second membre qui est simplement borné. Le résultat est presque optimal au vu des contre-exemples existants. Il a des implications directes sur la régularité des applications de transport optimales et sur la régularité des équations semi-géostrophiques.

Figalli a initié l'étude de l'ensemble singulier des applications de transport optimales et a obtenu les premiers résultats définitifs dans cette direction : il a montré qu'il a une mesure de Lebesgue nulle en toute généralité. Il a également apporté des contributions significatives à la théorie du problème de l'obstacle, en introduisant de nouvelles méthodes d'analyse de la structure de la frontière libre.

Figalli et ses coauteurs ont également appliqué les méthodes de transport optimal de manière frappante pour obtenir des résultats quantitatifs précis de stabilité pour plusieurs inégalités géométriques fondamentales, telles que l'inégalité isopérimétrique et l'inégalité de Brunn-Minkowski, sans aucune hypothèse supplémentaire de régularité sur les objets auxquels ces inégalités s'appliquent. Les méthodes ne dépendent pas non plus de symétries euclidiennes et s'étendent en particulier à l'inégalité isopérimétrique anisotrope (ou inégalité de Wulff) pour donner une description quantitative des états de basse énergie des cristaux.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

Dans le domaine extrêmement actif de la théorie du transport optimal, qui a attiré certains des plus grands esprits des mathématiques, Alessio Figalli se distingue comme un acteur majeur et innovant. Son œuvre, qui compte environ 150 publications, serait remarquable pour un mathématicien à l'âge de la retraite. Qu'il ait produit autant à 34 ans est tout simplement étonnant. Plus que le simple nombre de publications, c'est leur ampleur et leur profondeur qui témoignent d'une grande curiosité, d'une brillante perspicacité et d'une puissance technique remarquable.

Un aperçu complet des travaux de Figalli n'est pas possible dans un espace restreint. C'est pourquoi nous présentons ici une brève introduction au concept de transport optimal, suivie de la description de trois problèmes qui illustrent l'étendue et la virtuosité du travail de Figalli.

Imaginons $n$ livres posés sur une étagère. Une façon optimale de déplacer l'ensemble des livres d'une place vers la droite consisterait à déplacer le $n$-ième livre d'une place vers la droite, puis le $(n-1)$-ième livre, et ainsi de suite pour finalement déplacer le premier livre d'une place vers la droite. Cette méthode « coûte » $n$ déplacements. Il existe une autre solution optimale, également avec un coût $n$ : prendre le premier livre et le déplacer de $n$ places vers la droite. Chacune de ces solutions est une application de transport optimale.

La première analyse rigoureuse de ce type de problème est apparue il y a environ 250 ans dans les travaux du mathématicien français Gaspard Monge, qui a cherché à minimiser le coût du transport des matériaux de construction depuis leur source jusqu'au site de construction. En adoptant une vision abstraite de la géométrie du problème, Monge a conclu qu'une application optimale est celle qui minimise la distance parcourue par les matériaux de construction.

Les travaux de Monge sont restés inexploités pendant environ 150 ans, en partie parce que les outils mathématiques nécessaires faisaient défaut. Dans les années 1940, l'économiste et mathématicien Leonid Kantorovitch a relancé le sujet en utilisant les outils modernes de la théorie de la mesure et de l'analyse fonctionnelle. Il a élargi le cadre du problème pour y inclure des situations plus complexes, telles qu'un ensemble de plusieurs boulangeries fournissant des produits à plusieurs cafés différents. Dans ce cas, une application optimale permet de faire correspondre les boulangeries et les cafés tout en minimisant le coût

total du transport des produits de boulangerie. En 1975, Kantorovitch a reçu le prix de la Banque de Suède en sciences économiques pour ses travaux.

Au cours des années quatre-vingt, les mathématiciens ont réalisé plusieurs avancées théoriques importantes dans le domaine du transport optimal, ce qui a conduit à une explosion de nouvelles applications dans des domaines tels que la planification urbaine, la conception technique, l'hydrodynamique, le traitement d'images, la reconnaissance de formes et la biologie. Ces avancées ont également stimulé l'utilisation du transport optimal dans les mathématiques, en particulier en géométrie riemannienne et pour les équations aux dérivées partielles. Les travaux de Figalli et de ses coauteurs Francesco Maggi et Aldo Pratelli sur ce que l'on appelle les problèmes isopérimétriques, en sont un exemple frappant.

Le problème isopérimétrique classique peut être énoncé de la manière suivante : étant donné une clôture de longueur fixe, quelle forme permet d'entourer la plus grande surface de terrain ? On peut démontrer que la forme optimale est un cercle, qui englobe une superficie fixe tout en minimisant la longueur de la clôture. Les bulles de savon constituent un autre exemple de phénomène isopérimétrique : tout en renfermant une quantité fixe d'air, une bulle minimise un certain type d'énergie, à savoir la tension superficielle du film de savon.

Les cristaux ressemblent aux bulles de savon en ce sens qu'ils adoptent eux aussi une forme qui minimise l'énergie, mais une forme très différente qui est dictée par leur structure atomique. Ces propriétés des bulles et des cristaux, qui ont été comprises il y a un siècle, sont très idéalisées et ne tiennent pas compte des autres forces qui peuvent intervenir. Par exemple, comment un cristal se déforme-t-il lorsque de l'énergie est appliquée de l'extérieur sous forme de chaleur ?

C'est la question que Figalli et ses collaborateurs ont abordée en la présentant comme un problème de transport optimal. En appliquant une quantité d'énergie E, la forme idéalisée du cristal est « transportée » vers une nouvelle forme. En considérant que le coût est le carré de la distance que les points du cristal doivent parcourir pour que le cristal adopte la nouvelle forme, Figalli et ses collaborateurs sont parvenus au résultat étonnamment simple que chaque point se déplace en moyenne d'une quantité proportionnelle à $\sqrt{E}$. Il s'agit d'un résultat théorique important, car il établit la stabilité de la solution, ce qui signifie que si l'énergie ajoutée reste modérée, alors le changement de forme l'est également.

Un deuxième exemple des travaux de Figalli, mené avec plusieurs collaborateurs, a également produit des résultats théoriques profonds qui pourraient être immédiatement appliqués pour faire progresser la compréhension d'un système connu sous le nom d'équations semi-géostrophiques. Proposées pour la première fois par des météorologues dans les années quatre-vingt-dix, ces équations modélisent la dynamique à grande échelle de l'atmosphère et des océans. Elles expriment la compréhension de la physique des flux à grande échelle et impliquent des quantités telles que la vitesse, la pression et le vent géostrophique.

Alors que les équations semi-géostrophiques semblaient intuitivement fournir la bonne description des phénomènes atmosphériques et océaniques, il était difficile d'obtenir des solutions fiables de ces équations. Dans une telle situation, il est possible qu'aucune solution n'existe ou qu'il y ait plusieurs solutions mais que l'on ne puisse pas dire laquelle représente le phénomène physique réel. Un ordinateur n'est pas d'une grande aide, car les approximations nécessaires pourraient finir par fournir des solutions qui ne sont pas correctes. Ce qu'il faut, c'est une compréhension théorique solide du système d'équations et des résultats rigoureux sur l'existence et l'unicité des solutions.

Et ce sont justement ces avancées que Figalli et ses coauteurs ont réalisées. Ils ont examiné une autre équation, appelée équation de Monge-Ampère, qui a été largement étudiée en mathématiques, en particulier en géométrie différentielle, et qui se pose également dans de nombreux problèmes de science et d'ingénierie. Dans le contexte semi-géostrophique, l'équation de Monge-Ampère exprime le transport optimal d'une densité vers une autre, où le « coût » est le carré de la distance parcourue (une sorte d'énergie cinétique). Les densités peuvent être des gouttelettes d'eau ou des particules dans un nuage et celles-ci se déplacent de manière optimale. Étant donné une certaine densité, une solution de l'équation de Monge-Ampère fournit l'application de transport optimale.

Tous les résultats connus sur l'équation de Monge-Ampère au cours des cinquante dernières années n'ont pas permis de relier clairement le transport optimal au contexte semi-géostrophique. C'est pourquoi les travaux de Figalli, menés avec son coauteur Guido De Philippis, ont suscité tant d'enthousiasme. Ils ont fait une percée dans la compréhension de la structure des solutions de l'équation de Monge-Ampère qui a fourni exactement ce qui était nécessaire pour permettre à la théorie du transport optimal de s'appliquer aux équations semi-géostrophiques. Leur travail était un équilibre délicat entre finesse technique et pers-

picacité créative. Puis De Philippis et Figalli, avec Luigi Ambrosio et Maria Colombo, se sont attaqués directement aux équations semi-géostrophiques et ont fourni essentiellement une solution complète dans des domaines convexes tridimensionnels.

Le dernier exemple des travaux de Figalli concerne les problèmes à frontière libre. Ces problèmes ont fait l'objet d'études intensives en mathématiques, en particulier en géométrie des surfaces minimales, et se posent fréquemment en physique et en biologie ainsi que dans de nombreuses industries et dans la finance.

Considérons un bloc de glace immergé dans de l'eau liquide. À l'intérieur du bloc se trouve une région dont la température est à 0 degré. À l'extérieur du bloc se trouve une région dont la température est supérieure à 0 degré. Quelle est la forme de la frontière qui sépare ces deux régions ? Un autre exemple est ce que l'on appelle le problème de l'obstacle. Supposons que nous ayons une membrane élastique délimitée par un fil et un obstacle, par exemple une balle, posé sur une table. Si nous abaissons la membrane sur l'obstacle, nous voyons deux régions distinctes : la région où la membrane et la balle sont en contact, et la région où elles ne sont pas en contact. Lorsque l'obstacle est une balle, la frontière entre les deux régions est un cercle. Mais si l'obstacle est plus compliqué ou irrégulier, la forme de la frontière peut être beaucoup plus difficile à prédire. Les mathématiciens étudient ces questions dans un cadre abstrait dans lequel les objets qui entrent en contact peuvent être de n'importe quelle dimension.

Intuitivement, on s'attend à ce que la frontière libre soit lisse, mais il est extrêmement difficile de le démontrer. En principe, la frontière libre peut être un ensemble très irrégulier, voire fractal, ou posséder des singularités, c'est-à-dire des coudes, des plis ou des auto-intersections. Avant les années soixante-dix, on ne savait pas grand-chose de la forme et de la régularité de la frontière libre, même dans les cas les plus simples. Une avancée majeure a eu lieu en 1977, lorsque Luis Caffarelli a démontré que la frontière libre est lisse en dehors d'un ensemble de points singuliers. Il a également donné une description géométrique assez précise de la forme de l'ensemble de points singuliers.

Au cours des quarante années qui ont suivi, des résultats définitifs n'ont été obtenus que dans le cas d'objets bidimensionnels. C'est pourquoi les travaux de Figalli et de son coauteur Joaquim Serra, qui ont donné en 2017 une description complète et définitive de la frontière libre, ont été très bien accueillis. En particulier, ils ont montré que dans le cas tridimensionnel, la frontière libre est très lisse à quelques

singularités isolées près. Et pour toute dimension, ils ont démontré un résultat précis sur la nature des singularités dans les frontières libres. Les nouvelles méthodes introduites dans ce travail ont eu un grand retentissement.

Le domaine de recherche de Figalli est entouré d'une formidable machinerie technique qui s'avère souvent difficile à pénétrer pour les personnes extérieures. Passé maître de cette machinerie, Figalli a rendu ce domaine plus largement accessible grâce à ses exposés remarquables, qui dépassent les aspects techniques et révèlent la structure conceptuelle. Son influence a également été amplifiée par son amabilité et sa générosité à partager ses idées avec ses étudiants et ses jeunes collègues. Ces qualités personnelles, combinées à la brillance mathématique, font d'Alessio Figalli un chef de file idéal dont l'impact sur les mathématiques ne fait que commencer.

**Bibliographie**


— « Entretien avec Alessio Figalli », *Gazette des mathématiciens*, 2019, n° 159, p. 49-54.
— Figalli (Alessio) [dir.], *Autour des inégalités isopérimétriques*, Palaiseau, École polytechnique, 2011.
— Santambrogio (Filippo), « Inégalités isopérimétriques quantitatives via le transport optimal [d'après A. Figalli, F. Maggi et A. Pratelli] », Séminaire Bourbaki, 2011, exposé n° 1034.

# Médaille Fields : Peter Scholze

> « pour avoir transformé la géométrie arithmétique sur les corps $p$-adiques en introduisant les espaces perfectoïdes, avec des applications aux représentations galoisiennes, et pour avoir développé de nouvelles théories de cohomologie ».

Peter Scholze a transformé la géométrie arithmétique sur les corps $p$-adiques.

La théorie de Scholze sur les espaces perfectoïdes a profondément modifié le sujet de la géométrie $p$-adique en la reliant à la géométrie en caractéristique $p$. En utilisant cette théorie, Peter Scholze a démontré la conjecture de monodromie-poids de Deligne pour les intersections complètes. Dans une autre application, il a construit des représentations galoisiennes attachées aux classes de torsion dans la cohomologie des espaces localement symétriques, résolvant ainsi une ancienne conjecture.

La version de Scholze de la théorie de Hodge $p$-adique s'étend aux espaces rigides $p$-adiques généraux. Avec Bhatt et Morrow, Scholze a développé une version intégrale de la théorie de Hodge $p$-adique qui établit une relation entre la torsion dans la cohomologie de Betti et celle dans la cohomologie cristalline.

Sur la voie de la révolution qu'il a lancée dans la géométrie arithmétique, Scholze a abordé divers sujets qu'il a remodelés, tels que la topologie algébrique et l'homologie de Hochschild topologique.

Scholze a développé de nouvelles méthodes cohomologiques. Au-delà des corps $p$-adiques, la vision de Scholze d'une théorie de la cohomologie sur les entiers est devenue une ligne directrice qui fascine l'ensemble de la communauté mathématique.

### Vulgarisation (par Allyn Jackson)

Peter Scholze possède un type de talent mathématique qui n'apparaît que rarement. Il a la capacité d'absorber et de digérer toute la frontière d'un large éventail de recherches mathématiques couvrant de nombreux développements divers et souvent inachevés. Qui plus est, il sait comment intégrer ces développements dans de nouvelles synthèses

stupéfiantes qui font ressortir la simplicité qui était jusqu'alors restée dans l'ombre. Une grande partie de son travail est très abstrait et fondamental, mais il fait également preuve d'un sens aigu des nouveaux concepts et techniques qui permettront de démontrer d'importants résultats concrets. Sa vision unificatrice a transformé les mathématiques.

C'est lors d'une conférence en 2011 que Scholze, alors doctorant, a décrit pour la première fois le concept d'espaces perfectoïdes, déclenchant ainsi une révolution dans le domaine de la géométrie algébrique et arithmétique. Le concept a rapidement été adopté par les chercheurs du monde entier, qui y ont vu la notion idéale pour clarifier une grande variété de phénomènes et jeter un nouvel éclairage sur des problèmes qui n'avaient pas été résolus depuis des décennies.

La formulation du concept d'espaces perfectoïdes a nécessité un nouveau type de réflexion. L'une des raisons en est simplement que ces espaces sont immenses. Ils transcendent les conditions habituelles de finitude sur lesquelles les chercheurs s'appuient pour rendre les objets mathématiques accessibles. Les espaces perfectoïdes ne sont pas des fractales, mais ils présentent la structure déchiquetée et l'infinité de couches des fractales. Ils ressemblent également à un solénoïde mathématique, une spirale imbriquée à l'infini qui ne se referme jamais. Malgré leur complexité, les espaces perfectoïdes ont permis une grande unification et simplification.

Une définition précise des espaces perfectoïdes serait trop technique pour le présent exposé. Au lieu de cela, nous présentons une brève description de certains des développements qui ont conduit à leur conception.

L'objet d'étude fondamental de la géométrie algébrique est un espace abstrait appelé variété algébrique. Au niveau le plus élémentaire, une variété est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales. Par exemple, considérons le polynôme $x^2 + y^2 = 3z^2$. Si nous considérons les coefficients de ce polynôme comme des nombres réels, la variété qui en résulte est un espace géométrique facile à visualiser, à savoir la surface d'un cône tridimensionnel.

Si nous considérons que les coefficients s'étendent sur d'autres types de nombres, nous obtenons des objets abstraits qui peuvent ne pas être directement visualisables. Par exemple, les géomètres algébristes étudient souvent des variétés sur l'ensemble 0, 1, 2, ..., $p - 1$, où $p$ est un nombre premier. Doté d'une « arithmétique de l'horloge », cet ensemble est appelé un corps de caractéristique $p$, car si l'on ajoute 1 à lui-même $p$ fois, on trouve 0.

Les variétés sur les nombres $p$-adiques ($p$ étant à nouveau un nombre premier) sont également très étudiées. Les nombres $p$-adiques bouleversent notre intuition habituelle : nous pensons d'habitude que deux nombres sont proches l'un de l'autre lorsque leur différence est petite, alors que deux nombres $p$-adiques sont proches l'un de l'autre lorsque leur différence est un multiple d'une puissance élevée de $p$. Les nombres $p$-adiques forment un corps de caractéristique nulle, car si nous ajoutons $p$-adiquement 1 à lui-même de manière répétée, nous n'atteignons jamais 0. Étant donné un ensemble d'équations polynomiales à coefficients entiers, nous obtenons une certaine variété sur un corps de caractéristique $p$ et une variété différente avec des propriétés différentes sur les nombres $p$-adiques.

L'un des grands thèmes des mathématiques des XX^e^ et XXI^e^ siècles est la théorie de la cohomologie, qui fournit un ensemble de lentilles à travers lesquelles on peut voir les propriétés des espaces. Il existe de nombreux types de cohomologie, qui correspondent à différents types de propriétés des espaces. Le type le plus élémentaire de cohomologie topologique, appelé cohomologie singulière, organise les informations sur le nombre de trous dans un espace. Une autre cohomologie, appelée cohomologie de de Rham, organise les informations analytiques, c'est-à-dire les informations relatives aux structures du calcul différentiel sur l'espace. L'un des principaux résultats de la théorie de Hodge, nommée d'après W. V. D. Hodge, est un théorème qui affirme que, dans le cas des variétés sur les nombres complexes, les cohomologies singulière et de de Rham sont en fait deux façons différentes d'obtenir la même information.

Au cours des années soixante, Alexandre Grothendieck (lauréat de la médaille Fields en 1966) a retravaillé les fondements de la géométrie algébrique et a apporté une perspective entièrement nouvelle et plus générale à la notion d'espace abstrait. Cela l'a conduit, avec ses collègues, à formuler un nouveau type de cohomologie appelée cohomologie étale, qui peut être considérée comme une version purement algébrique de la cohomologie singulière. Une caractéristique cruciale de la cohomologie étale est que, pour une variété sur un corps de caractéristique $p$, elle établit un lien avec le groupe de Galois des polynômes qui définissent la variété. Outil puissant de la théorie des nombres, les groupes de Galois encodent un grand nombre d'informations sur la structure des solutions des équations polynomiales.

Grothendieck a conjecturé qu'il devait exister une version $p$-adique de la théorie de Hodge, c'est-à-dire une méthode pour comparer les

cohomologies des variétés sur les nombres $p$-adiques. En particulier, il a imaginé qu'une telle théorie permettrait de comparer la cohomologie étale à une version algébrique de la cohomologie de de Rham.

Dans la poursuite de cette conjecture, Jean-Marc Fontaine a introduit de nouveaux objets qui lui ont permis de relier la structure de Galois et la structure différentielle. Pour construire ces objets, il a mis au point un moyen de passer du corps des nombres $p$-adiques au corps de caractéristique $p$, une procédure que l'on appelle aujourd'hui en langage perfectoïde le « basculement ». Ces corps peuvent être considérés comme des variétés algébriques de dimension zéro possédant des représentations galoisiennes. À la fin des années soixante-dix, Fontaine et Jean-Pierre Wintenberger ont démontré que ces deux corps ont les mêmes représentations galoisiennes.

Cette époque a également vu la prolifération de nouveaux espaces analytiques adaptés au cadre $p$-adique. Le premier de ces espaces est la théorie des variétés analytiques rigides, due à John Tate. Parmi les autres proposés par la suite, la théorie des espaces adiques de Roland Huber est passée quelque peu inaperçue jusqu'à ce que Scholze se rende compte qu'ils fournissaient le cadre correct pour ses espaces perfectoïdes.

Nous pouvons maintenant dire, indirectement et de manière imprécise, ce que sont les espaces perfectoïdes. Il s'agit d'espaces abstraits dotés d'une cohomologie étale et fournissant exactement le cadre adéquat pour la théorie de Hodge $p$-adique proposée par Grothendieck. Ce sont des espaces adiques qui permettent de « basculer » des nombres $p$-adiques à la caractéristique $p$, permettant ainsi la traduction des outils pour la caractéristique $p$ dans le cadre des nombres $p$-adiques. Enfin, les espaces perfectoïdes permettent de généraliser le théorème de Fontaine-Wintenberger aux variétés à $n$ dimensions, ce qui permet de transporter des informations de théorie galoisienne du monde de la caractéristique $p$ au monde $p$-adique.

La création d'espaces perfectoïdes a rapidement conduit à des avancées spectaculaires. L'une des premières a été l'application par Scholze de l'opération de basculement à la conjecture de monodromie-poids de Pierre Deligne (lauréat de la médaille Fields en 1978). Depuis que Deligne a proposé la conjecture pour la première fois en 1970, certains cas ont été démontrés, y compris par Deligne lui-même. Grâce à une inclinaison perfectoïde de la démonstration de Deligne, Scholze a pu établir la conjecture dans de nouveaux cas importants. En fait, c'est la réflexion sur la conjecture de monodromie-poids qui a mis Scholze

sur la voie de la définition du concept d'espaces perfectoïdes. Scholze a également démontré une généralisation importante du « théorème de quasi-pureté » de Gerd Faltings (lauréat de la médaille Fields en 1986), qui est l'un des ingrédients clés du travail fondamental de Faltings dans la théorie de Hodge $p$-adique.

En outre, Scholze a étendu les résultats fondamentaux de la théorie de Hodge $p$-adique à un nouveau cadre. La possibilité d'une telle extension avait été conjecturée par Tate en 1966. Scholze a montré que les espaces analytiques rigides de Tate sont, dans un sens local, des espaces perfectoïdes. Avec ses collaborateurs Bhargav Bhatt et Matthew Morrow, Scholze a ensuite développé une version intégrale de la théorie de Hodge $p$-adique qui relie la cohomologie de la fibre de caractéristique $p$ à la cohomologie de la fibre $p$-adique.

Un dernier exemple des réalisations de Scholze est son travail sur la cohomologie des espaces localement symétriques, qui confirme à nouveau la puissance du point de vue perfectoïde. Dans l'un de ses théorèmes les plus profonds et les plus frappants, Scholze a démontré l'existence de représentations galoisiennes attachées à la cohomologie des espaces localement symétriques. Ce qui est remarquable, c'est que Scholze a pu traiter les classes de torsion et obtenir à partir d'elles, à l'aide d'un passage à la limite, les classes de cohomologie classiques. Une fois de plus, les espaces perfectoïdes jouent un rôle clé dans la démonstration. Ce résultat représente une avancée significative et un élargissement du programme de Langlands, qui est un réseau de conjectures profondes et d'une grande portée, dont l'origine remonte à Robert Langlands et qui est à l'origine d'un grand nombre de travaux en mathématiques aujourd'hui.

Scholze n'est pas simplement un spécialiste des mathématiques $p$-adiques pour un $p$ fixé. Par exemple, il a récemment développé une vision globale d'une cohomologie « universelle » qui fonctionne sur n'importe quel corps et sur n'importe quel espace. Dans les années soixante, Grothendieck a décrit sa théorie des motifs, dont le but était de construire une telle cohomologie universelle. Bien que Vladimir Voïevodski (lauréat de la médaille Fields en 2002) ait réalisé des avancées significatives dans le développement de la théorie des motifs, la vision de Grothendieck est restée en grande partie inachevée. Scholze aborde le problème de l'autre côté pour ainsi dire, en développant une théorie explicite de la cohomologie qui en tout point de vue se comporte comme une cohomologie universelle. La question de savoir si cette théorie répond à la vision motivique devient alors secondaire. Les

mathématiciens du monde entier suivent ces développements avec beaucoup d'intérêt.

L'œuvre de Peter Scholze est d'une part radicalement nouvelle, mais elle représente d'autre part un énorme développement, une unification et une simplification d'idées qui étaient déjà dans l'air. C'est comme si une pièce était plongée dans la pénombre avec seulement certains coins éclairés, lorsque l'œuvre de Scholze fait basculer un interrupteur révélant dans les moindres détails les caractéristiques de la pièce. L'effet était exaltant mais plutôt désorientant. Une fois que les mathématiciens se sont adaptés à la nouvelle lumière, ils ont commencé à appliquer le point de vue perfectoïde à une foule de problèmes en suspens.

La clarté des conférences et des exposés écrits de Scholze a largement contribué à rendre la perspective de participer à l'aventure perfectoïde attrayante pour de nombreux mathématiciens, tout comme sa personnalité unanimement décrite comme aimable et généreuse. Âgé de seulement trente ans, Peter Scholze continuera certainement à apporter des contributions révolutionnaires et à inspirer des mathématiques nouvelles.

**Bibliographie**


— « Entretien avec Peter Scholze », *Gazette des mathématiciens*, 2018, nº 158, p. 44-45.

— Fontaine (Jean-Marc), « Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids [d'après Peter Scholze] », Séminaire Bourbaki, 2013, exposé nº 1057.

— Le Stum (Bernard), « Raconte-moi un perfectoïde », *Gazette des mathématiciens*, 2017, nº 154, p. 60-64.

— Morel (Sophie), « Construction de représentations galoisiennes de torsion [d'après Peter Scholze] », Séminaire Bourbaki, 2015, exposé nº 1102.

# Médaille Fields : Akshay Venkatesh

> « pour sa synthèse de la théorie analytique des nombres, de la dynamique homogène, de la topologie et de la théorie des représentations, qui a permis de résoudre des problèmes anciens dans des domaines tels que l'équidistribution d'objets arithmétiques ».

Akshay Venkatesh a apporté de profondes contributions à un éventail exceptionnellement large de sujets mathématiques, notamment à la théorie des nombres, à la dynamique homogène, à la théorie des représentations et à la géométrie arithmétique. Il a résolu de nombreux problèmes anciens en combinant des méthodes issues de domaines apparemment sans rapport, présenté de nouveaux points de vue sur des problèmes classiques et formulé des conjectures d'une portée étonnante. Ce qui suit n'est qu'un petit échantillon de ses principales contributions.

Venkatesh a introduit une technique générale et unificatrice basée sur la théorie des représentations et la dynamique homogène dans le problème de la sous-convexité des fonctions L et (en partie en collaboration avec Michel) a utilisé ces idées pour donner un traitement complet de tous les cas de sous-convexité pour GL(2) sur les corps de nombres.

Il a fait des progrès importants sur le principe local-global pour les représentations d'un réseau quadratique par un autre, en collaboration avec Ellenberg.

En collaboration avec Einsiedler, Lindenstrauss et Michel, Venkatesh a démontré l'équidistribution des orbites toriques sur $SL(3, Z) \setminus SL(3, R)$, qui sont liées aux classes d'idéaux des corps cubiques totalement réels lorsque le discriminant tend vers l'infini.

Venkatesh a établi l'équidistribution effective des orbites périodiques de nombreux groupes semi-simples à la fois dans le cadre local et adélique, dans un travail conjoint avec Einsiedler, Margulis et en partie avec Mohammadi.

Avec Ellenberg et Westerland, Venkatesh a établi des cas spéciaux significatifs des conjectures de Cohen-Lenstra concernant les groupes de classes dans le cadre des corps de fonctions.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

L'étude des nombres a toujours été au cœur des mathématiques. Alors qu'un énorme corpus de connaissances s'est accumulé au fil des siècles, la théorie des nombres conserve d'infinis mystères qui naissent des concepts les plus simples : les relations entre les nombres entiers. Parce que les nombres entiers constituent le socle sur lequel reposent toutes les mathématiques, la théorie des nombres est liée à de nombreuses autres branches. Les théoriciens des nombres s'appuient sur des idées issues de l'analyse, de l'algèbre, de la combinatoire et de la géométrie, ainsi que d'autres domaines tels que la physique théorique ou l'informatique.

Même dans un domaine aussi vaste, Akshay Venkatesh se distingue par l'étonnante originalité avec laquelle il relie les problèmes de la théorie des nombres à des résultats profonds dans d'autres domaines. Loin de les utiliser comme des « boîtes noires » pour trouver des solutions, Venkatesh apporte un éclairage nouveau sur les résultats et met en évidence leurs liens inattendus avec la théorie des nombres. C'est ainsi qu'il a fait progresser de façon spectaculaire la théorie des nombres tout en enrichissant considérablement d'autres branches des mathématiques.

L'œuvre d'Akshay Venkatesh étant très diversifiée, il n'est pas possible d'en donner une vue d'ensemble dans un espace restreint. Ce qui suit est donc une description de trois exemples du travail de Venkatesh et de ses coauteurs, qui illustrent la profondeur et la nature étendue de ses recherches.

Le point de départ du premier exemple est constitué par des expressions polynomiales telles que $x^2 + xy + 7y^2 + yz + 12z^2$. Ces expressions sont extrêmement complexes, car elles modélisent les interactions complexes entre l'addition et la multiplication. L'expression ci-dessus est un exemple de forme quadratique, qui est un polynôme en un nombre quelconque de variables où la puissance la plus élevée est 2. Une question fondamentale est de savoir quels entiers on obtient en remplaçant les variables d'une forme quadratique par des valeurs entières. Par exemple, la forme quadratique $x^2$ ne produit que des carrés parfaits, alors que $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ produit tous les entiers, un fait démontré en 1770 par Joseph-Louis Lagrange.

Dans son ouvrage monumental intitulé *Disquisitiones arithmeticae* et publié en 1801, Carl Friedrich Gauss a montré comment transformer une forme quadratique en une autre par de simples substitutions

de variables. Une telle transformation peut grandement simplifier la forme quadratique. Tout entier produit par la forme la plus simple est également produit par la forme originale (bien que la réciproque ne soit pas nécessairement vraie). Si nous pouvons ainsi transformer une forme quadratique P à $m$ variables en Q à $n$ variables, avec $m \geqslant n$, nous disons que P représente Q. Quand une forme quadratique est-elle représentée par une autre ? Cette question est une variante du 11e problème de la célèbre liste de problèmes de David Hilbert qui date de 1900. En 1978, John S. Hsia, Yoshiyuki Kitaoka et Martin Kneser ont franchi une étape importante en démontrant que P représente Q si $m \geqslant 2n + 3$ (il y a quelques exceptions évidentes qui ne doivent pas nous préoccuper).

Pendant trente ans, les mathématiciens n'ont pas su si une relation plus précise entre $m$ et $n$ pouvait être établie. L'idée dominante était que le meilleur résultat serait probablement $m \geqslant 2n + 2$. C'est pourquoi la surprise fut grande lorsque Venkatesh et son coauteur Jordan Ellenberg montrèrent en 2008 que $m$ et $n$ pouvaient être beaucoup plus proches qu'on ne le pensait, à savoir que P représente Q si $m \geqslant n + 5$.

Plus surprenante encore a été leur méthode de démonstration, qui a fait appel à de précieuses connaissances issues de la théorie des systèmes dynamiques. Ils ont commencé par considérer le problème dans le contexte d'un réseau, qui est un ensemble de points régulièrement espacés dans un espace à $n$ dimensions, considéré comme un marquage de points entiers. L'utilisation des réseaux dans la théorie des nombres a une longue tradition, qui remonte au concept de « géométrie des nombres » de Hermann Minkowski à la fin du XIXe siècle. Les réseaux sont également un domaine naturel pour les systèmes dynamiques, où l'on peut penser que les points du réseau se déplacent sous l'influence d'un système qui évolue dans le temps, comme des particules de poussière qui se déplacent sous l'effet de la brise.

Certaines des connaissances les plus approfondies concernant les flots sur les réseaux se trouvent dans un théorème majeur démontré par Marina Ratner au début des années quatre-vingt-dix. Son théorème prédit où les points du réseau se déplacent à long terme sous l'influence d'un système dynamique. Ellenberg et Venkatesh ont utilisé une variante du théorème de Ratner qui leur a permis d'appliquer la dynamique des réseaux au problème de la représentation des formes quadratiques. Ce travail, qui constitue une réalisation exceptionnelle en théorie des nombres, a également suscité beaucoup d'enthousiasme parmi les spécialistes des systèmes dynamiques, qui ont rapidement ajouté ces nouvelles connaissances à leur panoplie d'outils.

Le travail sur la représentation des formes quadratiques est lié à des résultats puissants de Venkatesh qui sont apparus sous forme de prépublication en 2005 (publiés en 2010 et développés plus tard dans un travail conjoint avec Philippe Michel). Venkatesh y explorait une question plus technique connue sous le nom de problème de sous-convexité, en la plaçant dans un contexte totalement nouveau qui mettait en évidence les connexions avec d'autres domaines mathématiques, en particulier les systèmes dynamiques, d'une manière audacieuse et innovante.

Le deuxième exemple parmi les travaux de Venkatesh fait preuve d'une virtuosité similaire en produisant des avancées surprenantes dans la théorie des nombres en faisant appel à des outils provenant d'un autre domaine, cette fois-ci la topologie. Une caractéristique fondamentale des nombres entiers est la décomposition unique en produit de facteurs premiers : tout nombre entier peut être exprimé, d'une seule manière, comme un produit de nombres premiers. Les nombres entiers constituent l'exemple par excellence d'anneau, qui est un ensemble d'objets muni de trois opérations analogues à l'addition, la soustraction et la multiplication. L'ensemble A des nombres de la forme $a + b\sqrt{-5}$, où $a$ et $b$ sont des entiers, est un exemple d'anneau. L'anneau A a la propriété de contenir une solution d'une équation comme $x^2 = -5$, qui n'est pas résoluble avec les nombres entiers.

Mais l'anneau A a un défaut : il n'y a pas de factorisation unique. Par exemple, on peut factoriser 9 de deux façons dans A : $3 \times 3$ et $(2 + \sqrt{-5}) \times (2 - \sqrt{-5})$. Le nombre de classes d'un anneau est un nombre entier qui mesure le degré d'échec de l'anneau en matière de factorisation unique. Les nombres de classes sont présents dans toute la théorie des nombres. La manière exacte dont ils varient sur l'ensemble des anneaux est restée un mystère.

Ne disposant que de peu d'outils théoriques pour comprendre les nombres de classes, les mathématiciens se sont contentés de calculer les nombres de classes et de rechercher des motifs. C'est grâce à ces expériences, combinées à des connaissances approfondies, qu'Henri Cohen et Hendrik Lenstra ont formulé en 1984 des résultats heuristiques surprenants. Par exemple, on pourrait raisonnablement s'attendre à ce que les nombres de classes soient distribués au hasard parmi les entiers, de sorte qu'environ un tiers d'entre eux soient divisibles par 3. Étonnamment, l'heuristique de Cohen-Lenstra prédit que la proportion est en fait d'environ 43 %.

Pourquoi l'heuristique de Cohen-Lenstra fonctionne-t-elle ? La

réponse est restée insaisissable, malgré les nombreuses recherches menées au cours des trente dernières années. En 2016, Venkatesh et ses coauteurs, Jordan Ellenberg et Craig Westerland, ont fait une grande percée dans ce domaine. En se concentrant sur un problème plus restreint de nombres de classes, non pas pour des anneaux d'entiers mais pour des anneaux d'objets apparentés connus sous le nom de corps de fonctions, ils ont réalisé une avancée majeure dans la compréhension de l'heuristique de Cohen-Lenstra. Leur stratégie a consisté à transposer la question dans le domaine de la topologie, une branche des mathématiques qui étudie les propriétés fondamentales des formes.

Les mathématiciens savaient déjà que les problèmes liés aux corps de fonctions pouvaient être traduits en topologie. Mais la topologie est un vaste domaine doté de toute une panoplie d'outils. Quels sont les outils qui s'appliquent ? C'est là que la perspicacité de Venkatesh s'est avérée cruciale, l'amenant, lui et ses coauteurs, à exploiter la notion topologique de stabilité homologique, un concept très moderne qui a fait l'objet d'un grand nombre de recherches récentes. Venkatesh et ses coauteurs ont démontré un nouveau résultat en topologie, la stabilité homologique pour une classe d'objets topologiques connus sous le nom d'espaces de Hurwitz. Ils ont ensuite transposé ce résultat dans le domaine de la théorie des nombres pour démontrer la validité de certaines des prédictions de Cohen et Lenstra pour les corps de fonctions. Une fois de plus, les travaux de Venkatesh ont enrichi deux branches des mathématiques très éloignées l'une de l'autre.

Le dernier exemple parmi les travaux de Venkatesh n'est pas un résultat abouti, mais plutôt un ensemble de nouvelles conjectures audacieuses que ses coauteurs et lui ont formulées. Ces conjectures, qui cherchent à expliquer des liens profonds entre des phénomènes de topologie d'une part et de théorie des nombres d'autre part, montrent que Venkatesh est un précurseur de nouvelles directions de recherche. Ces idées ont suscité beaucoup d'enthousiasme dans les séminaires qu'il a animés au cours de l'année universitaire 2017-2018.

Ce travail conjectural est lié au programme de Langlands, qui est aujourd'hui à l'origine d'une grande partie de la recherche mathématique. Le programme de Langlands envisage un réseau de relations entre une variété de phénomènes qui apparaissent dans différentes branches des mathématiques, notamment la topologie, l'analyse, l'algèbre et la théorie des nombres. Les mathématiciens sont loin d'avoir réalisé l'ensemble du programme de Langlands, mais certains cas particuliers ont été confirmés. L'exemple le plus connu est sans doute la

démonstration dans les années quatre-vingt-dix du dernier théorème de Fermat, menée par Andrew Wiles avec l'aide précieuse de Richard Taylor.

La méthode de Taylor-Wiles issue de ces travaux est devenue un outil puissant pour relier des objets géométriques tels que les courbes elliptiques à des objets analytiques tels que les formes modulaires. Il s'agit exactement du type de connexions prévues par le programme de Langlands. Aussi puissante soit-elle, la méthode de Taylor-Wiles telle qu'elle a été développée à l'origine ne s'appliquait que dans un cadre restreint, à savoir celui d'objets géométriques spéciaux appelés variétés de Shimura. Des résultats récents pour généraliser la méthode de Taylor-Wiles à des variétés autres que celles de Shimura figurent en bonne place dans les travaux les plus récents de Venkatesh.

Ces travaux portent sur un ensemble d'objets topologiques connus sous le nom d'espaces localement symétriques. Venkatesh et ses coauteurs ont découvert que la topologie de ces espaces recèle des symétries inattendues. Ces symétries apparaissent dans les groupes d'homologie des espaces localement symétriques ; le groupe d'homologie d'un espace peut être considéré comme une mesure des trous dans l'espace. Venkatesh a formulé une vision pour expliquer ces symétries en faisant appel à un domaine mathématique différent connu sous le nom de cohomologie motivique. L'explication fait appel à la méthode de Taylor-Wiles généralisée et, en tant que sous-produit, pourrait permettre de mieux comprendre cette méthode. Le travail est loin d'être terminé, mais les premières prévisions indiquent qu'il constituera une étape clé dans l'ascension vers une compréhension complète du programme de Langlands.

La plupart des mathématiciens résolvent des problèmes ou élaborent des théories. Akshay Venkatesh fait les deux. Qui plus est, c'est un théoricien des nombres qui a développé une compréhension exceptionnellement profonde de plusieurs domaines très différents de la théorie des nombres. Cet éventail de connaissances lui permet de situer les problèmes dans de nouveaux contextes qui offrent le cadre idéal pour mettre en évidence la véritable nature des problèmes. Âgé de trente-six ans seulement, Venkatesh continuera d'être un acteur de premier plan dans le domaine des mathématiques pour les années à venir.

**Bibliographie**

— « Entretien avec Akshay Venkatesh », *Gazette des mathématiciens*, 2018, nº 158, p. 42-44.
— Breuillard (Emmanuel), « Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes [d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh] », *Séminaire Bourbaki*, 2009, exposé nº 1008.

# Prix Gauss : David Donoho

> « pour ses contributions fondamentales à l'analyse, à la statistique et à l'informatique dans le domaine du traitement du signal ».

De grandes quantités de données sont aujourd'hui produites à un rythme de plus en plus accéléré. Leur traitement par échantillonnage, compression et débruitage est devenu une entreprise essentielle.

Tout au long de sa remarquable carrière de chercheur, David Donoho nous a aidés à donner un sens aux données, qui se présentent souvent sous la forme de signaux et d'images. Ses recherches transcendent les frontières entre les mathématiques, la statistique et la science des données. Ses contributions vont des théories mathématiques et statistiques profondes aux algorithmes informatiques efficaces et à leurs applications.

Dès ses premières recherches, Donoho s'est écarté du courant principal des mathématiques appliquées et des statistiques classiques. Il a compris l'importance de la représentation parcimonieuse et de l'optimisation dans le traitement des signaux. Il a également reconnu la puissance des représentations de type ondelette pour une variété de tâches dans l'analyse des signaux et des images. Un exemple est son travail avec Johnstone, où ils ont exploité la parcimonie des représentations en ondelettes avec un seuillage souple pour améliorer l'estimation et le débruitage des signaux. Le développement, l'analyse et l'application des « courbelettes » (*curvelets*) par Donoho et ses collaborateurs ont introduit un autre outil puissant dans la représentation d'images parcimonieuses. Alors que les ondelettes peuvent être considérées comme une généralisation des fonctions delta et des développements de Fourier en utilisant une base qui représente à la fois la localisation et la fréquence, les courbelettes vont plus loin en ajoutant la localisation dans l'orientation. Ce que les ondelettes font pour les signaux unidimensionnels, les courbelettes peuvent le faire pour les données multidimensionnelles. La représentation et le traitement efficaces des images avec des bords sont des applications naturelles et concluantes.

L'acquisition comprimée est une technique qui permet d'échantillonner et de reconstruire efficacement un signal en exploitant la parcimonie dans une représentation incohérente et en surpassant ainsi

la limite classique du taux d'échantillonnage requis imposée par le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon. Cette technique a été appliquée par exemple pour raccourcir les séances d'imagerie par résonance magnétique. Donoho et ses collaborateurs ont contribué à développer et à affiner cette théorie puissante. Il a montré que l'on pouvait résoudre certains types de systèmes linéaires sous-déterminés par minimisation $L^1$ à condition que la solution soit suffisamment creuse. Il a déduit l'existence de transitions nettes pour la récupération de signaux rares à partir de types particuliers de mesures aléatoires.

David Donoho se distingue par sa capacité à réunir les aspects purs et appliqués des mathématiques et de la statistique. Il a exercé une influence fondamentale par ses recherches originales mais aussi par ses écrits et par l'encadrement d'étudiants et de postdoctorants.

**Vulgarisation**

Les examens d'imagerie par résonance magnétique (IRM) sont essentiels aux soins médicaux de pointe : la vue tridimensionnelle de l'intérieur du corps permet aux médecins de repérer un anévrisme sur le point d'éclater, de voler à travers le cerveau pour planifier une intervention chirurgicale ou de repérer une fissure dans un os, le tout sans scalpel ni dose de radiation. Cependant, lorsque vous êtes le patient qui subit l'examen, les IRM imposent des exigences très peu technologiques. On vous demande de rester parfaitement immobile pendant près d'une heure à l'intérieur d'un tube étroit qui émet des bruits métalliques et des bruits sourds.

Mais le processus de balayage, qui semble interminable, est désormais sur le point d'être dix fois plus rapide grâce à une nouvelle génération d'appareils IRM qui commencent à être utilisés dans les hôpitaux. Cette nouvelle technologie permet de gagner du temps et de l'argent sur les 80 millions d'IRM réalisées chaque année dans le monde. Elle rendra les IRM pratiques pour les enfants agités qui ne peuvent pas rester immobiles pendant de longs balayages. L'accélération permet également de réaliser des examens 3D ambitieux et des « films » IRM du cœur en train de battre.

Les ingénieurs et les médecins qui ont mis ces nouveaux appareils sur le marché se sont inspirés d'idées publiées dans des revues de mathématiques en 2006. Ces idées sont aujourd'hui connues sous le nom d'« acquisition comprimée », un terme inventé par David Donoho, lauréat du prix Gauss 2018. Le prix Gauss récompense des travaux

mathématiques dont l'impact dépasse le cadre des mathématiques.

Avec Emmanuel Candès, Terence Tao et d'autres mathématiciens, Donoho a publié au milieu des années 2000 des analyses mathématiques qui montraient que l'acquisition comprimée pouvait fonctionner en pratique, et a proposé des algorithmes qui ont eu suffisamment de succès pour inspirer d'autres recherches. Une vague massive de travaux mathématiques et expérimentaux a rapidement suivi avec des mathématiciens appliqués, des spécialistes de l'analyse harmonique et des théoriciens de l'information qui ont approfondi la théorie, des spécialistes d'analyse numérique et des informaticiens qui ont créé des algorithmes rapides pour permettre le calcul, et des chercheurs en IRM qui ont ajouté leur propre compréhension profonde de la physique de la résonance magnétique et de nombreuses idées créatives supplémentaires.

L'approbation de nouveaux dispositifs médicaux par l'Agence fédérale américaine des produits alimentaires et médicamenteux place la barre très haut pour toute innovation potentielle. Les dispositifs basés sur l'acquisition comprimée ont pourtant été homologués par cette agence en 2017, soit à peine dix ans après la parution des premiers articles sur le sujet dans les revues de mathématiques. Quel impact !

**La rareté**

Donoho, le lauréat du prix Gauss 2018, a été l'un des premiers chercheurs à développer des mathématiques pour décrire les signaux rares. Ces signaux sont nuls la plupart du temps, avec des oscillations occasionnelles non nulles. Vous en avez des exemples tout autour de vous. Pensez au ciel nocturne : une étoile occasionnelle (représentée disons par un « 1 » très solitaire) ponctue l'immense noirceur (représentée par une mer de « 0 »). Pensez au génome humain : deux personnes ne diffèrent qu'une fois tous les trois cents nucléotides.

Donoho a rencontré la rareté pour la première fois juste après l'université, alors qu'il travaillait dans le domaine de la prospection pétrolière. Pour trouver du pétrole dans les profondeurs du sous-sol, les géophysiciens déclenchaient des explosions qui envoyaient des ondes sismiques dans la terre. Chaque fois que l'onde atteignait une nouvelle couche de roche, elle renvoyait un écho. À partir du signal d'écho, les scientifiques pouvaient reconstruire une image des couches sous-jacentes. Les séries d'échos sismiques étaient peu nombreuses, car les changements de couches étaient relativement rares.

**La norme $L_1$**

À l'âge de 21 ans, Donoho est tombé sur une énigme qui a marqué sa carrière. À l'époque, les mesures sismiques brutes ne donnaient qu'une idée vague et floue de l'emplacement des couches rocheuses. Mais les géophysiciens avaient mis au point des méthodes qui semblaient étonnamment efficaces pour « débruiter » le signal et identifier avec précision les changements de couches.

Ces méthodes mesuraient la distance d'une manière non traditionnelle. Depuis les travaux fondamentaux du géant des mathématiques Carl Friedrich Gauss (qui a donné son nom au prix Gauss), les scientifiques utilisaient traditionnellement la distance $L_2$ dans le traitement de données. Cette distance est également appelée distance euclidienne ou distance à vol d'oiseau, car elle mesure la longueur d'un chemin rectiligne entre deux points, comme dans les cours de géométrie du lycée. Toutefois, les nouvelles méthodes surprenantes utilisaient plutôt la « norme $L_1$ », également appelée distance de Manhattan, parce qu'elle mesure le nombre de pâtés de maisons que l'on doit parcourir entre deux points sur une grille rectangulaire de rues, les diagonales comme Broadway n'étant pas autorisées !

Il y avait quelque chose de mystérieusement efficace dans cette combinaison de signaux rares avec la norme $L_1$, mais personne ne savait pourquoi. Lorsque Donoho a repris ses études pour obtenir son doctorat, il était déterminé à résoudre l'énigme. Au cours des années suivantes, il a développé une théorie mathématique pour démontrer l'efficacité déraisonnable de la norme $L_1$ avec des signaux rares.

Certains phénomènes semblaient miraculeux. Il a d'abord utilisé les techniques combinant la norme $L_1$ et la rareté pour récupérer un signal rare qui a été brouillé d'une manière inconnue et arbitraire, ce qu'on appelle aujourd'hui la « déconvolution aveugle ». Il les a ensuite utilisées pour récupérer des données totalement manquantes. Souvent, dans le traitement des signaux, une partie d'un signal peut être manquante ; pensez à un vieil enregistrement acoustique sans aigus ni graves. Donoho, Philip Stark et Ben Logan ont montré que pour certains signaux spéciaux, les signaux rares, les techniques combinant la norme $L_1$ et la rareté pouvaient parfaitement récupérer le signal basse fréquence manquant. Dans d'autres travaux, Donoho et ses collaborateurs Jeffrey Hoch et Alan Stern ont développé des techniques similaires pour récupérer les hautes fréquences manquantes, en termes acoustiques les « notes aiguës » manquantes.

La norme $L_1$ et la rareté ont également permis de « débruiter » les signaux : si vous ajoutez du bruit à un signal rare et que vous regardez ensuite le graphique, vous verrez des « marguerites » (le signal) dépasser les « mauvaises herbes » (le bruit). La minimisation $L_1$ permet d'éliminer les mauvaises herbes tout en conservant les marguerites. Donoho et Iain Johnstone ont montré que pour les signaux rares, cette méthode était essentiellement optimale.

**L'analyse harmonique**

La « révolution des ondelettes » des années quatre-vingt et quatre-vingt-dix en mathématiques appliquées a encore transformé la pensée de Donoho. À l'époque, les spécialistes d'analyse harmonique numérique tels qu'Yves Meyer, lauréat du prix Gauss 2014, et ses collaborateurs Ronald Coifman, Ingrid Daubechies et Stéphane Mallat construisaient de nouveaux outils pour convertir les signaux numériques dans des formes plus utiles. Leurs nouvelles transformées en ondelettes ont littéralement époustouflé Donoho. La transformation des données numériques à l'aide de ces nouveaux outils a révélé que la rareté était omniprésente dans les images et les autres médias que nous utilisons aujourd'hui quotidiennement. Pour Donoho, cela a considérablement élargi le champ des applications de la norme $L_1$ et de la rareté.

Les résultats mathématiques de Donoho ont mis l'accent sur la nécessité d'être aussi rare que possible. Ils l'ont poussé à être encore plus parcimonieux que les ondelettes, lorsque c'était possible. Il a cherché des systèmes « au-delà des ondelettes » qui mettraient en évidence la rareté cachée des phénomènes géométriques tels que les bords, les lignes et les filaments dans les images. Ses collaborateurs Emmanuel Candès et Jean-Luc Starck ont rapidement cherché à aller au-delà des ondelettes pour trouver des « courbelettes » (*curvelets*), des *beamlets* et autres « X »-lettes.

Donoho s'est efforcé de réduire encore davantage la densité des signaux en combinant plusieurs systèmes différents d'analyse harmonique. Par exemple, une onde sinusoïdale contaminée par plusieurs pointes ne serait pas un signal rare avec l'analyse de Fourier traditionnelle, mais elle pourrait être synthétisée de manière parcimonieuse en utilisant à la fois l'analyse de Fourier et les ondelettes. Avec ses collaborateurs Michael Saunders et Scott Chen, il a développé un algorithme appelé « poursuite de base » pour résoudre le problème de la synthèse en minimisant la norme $L^1$. Son succès semble miraculeux,

car la tâche — résoudre un système d'équations sous-déterminées et obtenir algorithmiquement la réponse la plus parcimonieuse possible — semble d'une complexité redoutable. Avec ses collaborateurs Xiaoming Huo, Michael Elad et Vladimir Temlyakov, Donoho a présenté une série de résultats mathématiques fondamentaux qui montrent que la norme $L^1$ pouvait réellement trouver la synthèse la plus parcimonieuse possible.

**L'acquisition comprimée**

Les trois axes de recherche décrits dans les sections ci-dessus ont convergé au milieu des années 2000 pour donner naissance à l'acquisition comprimée, la théorie mathématique qui a inspiré les IRM rapides qui arrivent aujourd'hui sur le marché. Ces trois ingrédients (la parcimonie des images vues dans une base d'ondelettes, l'utilisation de la norme $L^1$ et l'utilisation d'équations sous-déterminées) ont été réunis dans les travaux de Donoho et de Candès, Romberg et Tao mentionnés plus haut. Leurs analyses mathématiques ont montré clairement pourquoi les trois ingrédients doivent être présents pour permettre des accélérations et comment, sous certaines hypothèses, cette combinaison fonctionne à coup sûr. Une compréhension mathématique aussi claire a inspiré des progrès rapides dans la recherche sur les IRM et dans d'autres domaines.

**Une efficacité déraisonnable**

Depuis ses études universitaires, Donoho est convaincu que les mathématiciens contribueraient à l'ère de l'information en fournissant de nouveaux modèles pour les données, de nouveaux algorithmes de traitement et des idées théoriques subtiles mais puissantes. Il a lui-même fait ces trois choses.

Ce que Donoho ne savait pas lorsqu'il était jeune et ce qu'il ne pouvait pas savoir, c'est que la croissance continue des mathématiques pures serait si importante. Par exemple, dans ses propres travaux sur l'acquisition comprimée, Donoho a découvert que les théories des matrices aléatoires, des espaces de Banach de grande dimension, des polytopes convexes aléatoires et des verres de spin jouaient un rôle essentiel. Ce sont dans tous les cas des mathématiques pures sans rapport avec le traitement du signal et beaucoup plus jeunes que Donoho lui-même !

Il y a cinquante ans, Eugène Wigner a évoqué l'« efficacité déraisonnable des mathématiques » pour désigner la tendance surprenante des mathématiques pures à inspirer des applications pratiques.

Si un jour vous profitez d'une IRM rapide, vous vous souviendrez peut-être aussi de la phrase de Wigner !

# Médaille Chern : Masaki Kashiwara

> « pour ses contributions exceptionnelles et fondamentales à l'analyse algébrique et à la théorie des représentations sur une période de près de cinquante ans ».

L'empreinte de Masaki Kashiwara sur les mathématiques actuelles est exceptionnelle. Elle s'étend de l'analyse microlocale, de la théorie des représentations et de la combinatoire à l'algèbre homologique, à la géométrie algébrique, à la géométrie symplectique et aux systèmes intégrables. Ses contributions décisives à la théorie des D-modules et sa création des bases cristallines, qui ont façonné la théorie moderne des représentations, sont les plus remarquables.

Pendant près de cinquante ans, il a développé la théorie et les applications de l'analyse algébrique. Introduite par Satō vers 1960, l'analyse algébrique est un cadre dans lequel les systèmes d'équations différentielles linéaires sont formulés comme des modules sur un anneau D d'opérateurs différentiels et sont analysés à l'aide de moyens algébriques tels que les anneaux, les modules, les faisceaux et les catégories. L'idée de départ de Satō concernant les D-modules a été largement développée par Kashiwara dans sa thèse de 1971 et est devenue un outil fondamental dans de nombreuses branches des mathématiques. Avec Satō et Kawai, il a développé l'analyse microlocale, l'étude des équations aux dérivées partielles, en combinant localement l'espace et les variables de Fourier, et en travaillant sur le fibré cotangent de la variété de base. Dans les années quatre-vingt, il a introduit et développé avec Schapira la théorie des faisceaux microlocaux.

L'un de ses premiers résultats majeurs a été la construction en 1980 de la correspondance de Riemann-Hilbert, une généralisation de grande envergure du 21e problème de Hilbert concernant l'existence d'une équation différentielle linéaire sur la droite projective avec une monodromie prescrite. Généralisant largement les travaux de Deligne, Kashiwara et plus tard indépendamment Mebkhout ont établi une équivalence entre la catégorie dérivée des D-modules holonomes réguliers sur une variété algébrique complexe (« systèmes d'équations différentielles linéaires ») et la catégorie dérivée des faisceaux constructibles sur la même variété (« solutions »), créant ainsi un pont fondamental entre l'algèbre et la topologie.

La correspondance de Riemann-Hilbert a trouvé une application remarquable à un problème de la théorie des représentations : la conjecture de Kazhdan-Lusztig, démontrée indépendamment par Brylinski-Kashiwara et Beilinson-Bernstein. Cette belle synthèse d'algèbre, d'analyse et de géométrie peut être considérée comme un précurseur de la théorie géométrique des représentations sous sa forme moderne. Avec Tanisaki, Kashiwara a encore généralisé la conjecture aux algèbres de Lie de Kac-Moody de dimension infinie, un ingrédient essentiel pour l'achèvement du programme de Lusztig en caractéristique strictement positive.

Le développement par Kashiwara en 1990 de la théorie des bases cristallines est un autre point de repère dans la théorie des représentations. Les groupes quantiques sont des déformations des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie de Kac-Moody provenant de certains modèles de réseaux en physique statistique. Ici, le paramètre de déformation $q$ est la température, $q = 0$ correspondant au zéro absolu. Les bases cristallines de Kashiwara sont des bases de représentations de groupes quantiques à $q = 0$ dotées d'une certaine structure de graphe, qui encodent des informations essentielles sur les représentations. En tant qu'outil combinatoire puissant, les bases cristallines ont eu un impact considérable sur de nombreuses applications, notamment la résolution du problème classique de la décomposition des produits tensoriels de représentations. En 1991, Kashiwara a montré que pour tout $q$, elles se relèvent de manière unique en des bases globales. Il s'est avéré par la suite que ces bases coïncidaient avec les bases canoniques découvertes par Lusztig d'un point de vue totalement différent en 1990, à la fois pour le cas $q = 0$ et le cas $q$ générique.

Les travaux de Kashiwara, avec de nombreux coauteurs différents, continuent d'être révolutionnaires. Il a été au premier plan des développements récents sur les bases cristallines, y compris la catégorisation des représentations des algèbres enveloppantes quantifiées. Parmi les autres faits marquants, on peut citer la résolution de deux problèmes ouverts bien connus concernant les D-modules : la « conjecture de la dimension 3 » (2014) et l'extension de la correspondance de Riemann-Hilbert au cas irrégulier (2016). Son travail sur la quantification d'isotopies hamiltoniennes dans la catégorie des faisceaux (2012) a ouvert la voie à des applications de la théorie des faisceaux microlocaux à la géométrie symplectique.

Kashiwara a obtenu de nombreux autres résultats, trop nombreux pour être mentionnés. Par exemple, il a obtenu des résultats majeurs

sur les représentations des groupes de Lie réels et sur les algèbres de Lie de dimension infinie, en particulier en relation avec les systèmes intégrables et la hiérarchie KP.

L'influence de Kashiwara s'étend bien au-delà de ses publications. Nombre de ses conférences informelles ont abordé des sujets importants et ses idées ont été une source d'inspiration pour de nombreuses personnes. Plusieurs de ses livres sont devenus des références essentielles, son livre sur les faisceaux avec Schapira étant considéré comme la bible en la matière. Il a été directeur de l'Institut de recherches pour les sciences mathématiques de Kyoto et vice-président de l'Union mathématique internationale de 2003 à 2006.

Les travaux de Kashiwara se distinguent par leur profondeur, leur ampleur, leur brio technique et leur extraordinaire originalité. Il est impossible d'imaginer l'analyse algébrique ou la théorie des représentations sans ses contributions.

**Vulgarisation (par Julie Rehmeyer)**

Masaki Kashiwara est un bâtisseur de ponts, un créateur d'outils et un visionnaire qui ouvre de nouveaux mondes mathématiques à explorer. En près de cinquante ans de carrière mathématique, il a ouvert un nouveau domaine et démontré des théorèmes étonnants avec des méthodes que personne n'avait imaginées.

La première contribution importante de Kashiwara a été le développement d'un outil connu sous le nom de « D-module ». Les D-modules sont une structure élaborée construite à partir d'équations différentielles, qui constituent l'un des outils mathématiques les plus fondamentaux utilisés dans le monde scientifique. Les équations différentielles elles-mêmes appartiennent à une branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse, tandis que l'outil que Kashiwara a construit pour elles appartient à une branche connue sous le nom d'algèbre. Les D-modules vivent donc dans ces deux mondes mathématiques, créant un pont entre les deux domaines qui permet de transférer les objets et les méthodes d'un domaine à l'autre. Il a tellement développé ce pont qu'il est devenu le fondement d'un nouveau domaine, l'analyse algébrique.

Les D-modules ont été initialement créés par Mikio Satō, le professeur de Kashiwara pendant son doctorat. Ils ont travaillé ensemble pour comprendre pleinement les D-modules, découvrir tous les différents types et comment ces types sont liés les uns aux autres.

Kashiwara a ensuite mis les D-modules à l'œuvre, en démontrant

à quel point ils pouvaient être extrêmement puissants. Il les a utilisés pour démontrer une conjecture ancienne et extrêmement importante, la correspondance de Riemann-Hilbert, qui pose une question fondamentale sur les équations différentielles. Ces équations ne sont parfois pas définies en tout point. Par exemple, $y = 1/x$ n'est pas défini au point $x = 0$. Ces points sont appelés « singularités ». Les équations peuvent se comporter de différentes manières à proximité de ces points. Kashiwara a montré comment trouver toutes les équations différentielles qui se comportent d'une manière particulière près de ces points. Le cas le plus simple, lorsque l'équation est à une seule variable, avait été résolu dans les années soixante.

Mais les méthodes qu'il a utilisées ont permis d'aller bien au-delà de la simple démonstration de cette conjecture. Il l'a démontrée en jetant un autre pont entre différents domaines, cette fois entre l'analyse algébrique et un domaine connu sous le nom de topologie. Il a montré qu'il existait une bijection entre un type particulier de D-module et un objet topologique connu sous le nom de « faisceau pervers ».

Il a ensuite appliqué ce principe à un troisième domaine, la théorie des représentations. La théorie des représentations pose un type particulier de questions sur la symétrie. L'une des questions les plus fondamentales en mathématiques concerne tous les types de symétries possibles. Dans le monde physique, nous ne connaissons généralement que quelques types fondamentaux : la symétrie axiale d'un visage, la symétrie de rotation d'un flocon de neige, la symétrie de translation d'une frise de papier peint, et des combinaisons de ces symétries comme celle d'un tire-bouchon. Mais dans les dimensions supérieures, les possibilités sont infinies. La question de la théorie des représentations est la suivante : quels sont les différents objets mathématiques qui présentent un type particulier de symétrie ?

Avec Jean-Luc Brylinski (et en même temps qu'un autre groupe composé d'Alexandre Beilinson et de Joseph Bernstein), il a stupéfié les spécialistes de la théorie des représentations en démontrant ce que l'on appelle la conjecture de Kazhdan-Lusztig, qui se situe à la jonction de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. La méthode de démonstration a semblé presque magique à la plupart des mathématiciens, tant elle était brillante et inattendue. Kashiwara a ensuite démontré, avec Toshiyuki Tanisaki, une forme encore plus générale et plus puissante de la conjecture. Cette démonstration a révolutionné la théorie des représentations en la transformant en sa forme moderne.

Kashiwara a également inventé un autre outil clé de la théorie des

représentations, connu sous le nom de « base cristalline ». Il existe souvent un très grand nombre d'objets mathématiques différents qui présentent une symétrie particulière. Ces objets peuvent être liés de manière complexe et très difficile à comprendre. Une base cristalline est une sorte de squelette qui montre comment ces objets sont liés entre eux et qui révèle ces relations dans un simple graphe. Supposons par exemple que la symétrie sous-jacente soit composée de deux symétries différentes, comme la symétrie d'un tire-bouchon est une combinaison de rotation et de translation. La base cristalline sera alors un graphe composé de deux parties non reliées. Les bases cristallines sont désormais utilisées dans toute la théorie des représentations.

Ses travaux se poursuivent encore aujourd'hui. Il continue de développer la théorie des bases cristallines et des D-modules, et a démontré une extension de la correspondance de Riemann-Hilbert en 2016. Il a également jeté des ponts vers d'autres domaines, notamment vers la géométrie symplectique.

En outre, il a inspiré de nombreux autres mathématiciens par ses idées. Il a écrit plusieurs ouvrages qui sont devenus des bibles dans leur domaine. Il a également été directeur de l'Institut de recherche en sciences mathématiques de l'université de Kyoto et vice-président de l'Union mathématique internationale.

**Bibliographie**


— Guillermou (Stéphane), « Le problème de Riemann-Hilbert dans le cas irrégulier [d'après des travaux de D'Agnolo, Kashiwara, Mochizuki et Schapira] », Séminaire Bourbaki, 2017, exposé n° 1128.

— Kashiwara (Mazaki), *Bases cristallines des groupes quantiques* (réd. Ch. Cochet), Paris, Société mathématique de France, 2002.

— Mathieu (Olivier), « Bases des représentations des groupes simples complexes [d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.] », Séminaire Bourbaki, 1991, exposé n° 743.

— Torossian (Charles), « La conjecture de Kashiwara-Vergne [d'après Alekseev et Meinrenken] », Séminaire Bourbaki, 2007, exposé n° 980.

# Prix Nevanlinna : Constantínos Daskalákis

> « pour avoir transformé notre compréhension de la complexité informatique de problèmes fondamentaux des marchés, des enchères, des équilibres et d'autres structures économiques. Son travail fournit à la fois des algorithmes efficaces et des limites à ce qui peut être réalisé efficacement dans ces domaines. »

Constantínos Daskalákis a développé un ensemble impressionnant de résultats sur la complexité informatique de certains problèmes centraux de la théorie économique. Ces résultats ont également joué un rôle clé dans l'émergence d'un thème important en informatique, dans lequel les algorithmes sont conçus pour des agents qui se comportent en fonction de leur propre intérêt.

Les premiers travaux de Daskalákis (avec Goldberg et Papadimitriou) ont montré que la recherche des équilibres de Nash est complète dans la classe de complexité PPAD ; cela implique qu'elle est calculatoirement équivalente, dans un sens précis, à la recherche des points fixes de Brouwer, ce qui établit une réciproque naturelle de la célèbre construction d'équilibres de Nash à l'aide de théorèmes de points fixes. Cette difficulté de calcul pour trouver les équilibres de Nash en général soulève des questions importantes sur leur rôle en tant que résultats prédits lorsque les joueurs interagissent d'une manière qui est modélisée par un jeu.

Daskalákis a également apporté d'importantes contributions à la théorie des mécanismes d'incitation, en créant des algorithmes destinés à être utilisés par des agents égoïstes. L'état antérieur de l'art dans ce domaine (y compris les travaux de Myerson sur les enchères optimales, récompensés par le prix de la Banque de Suède) était largement limité aux problèmes où les objectifs des participants sont unidimensionnels, décrits par un seul paramètre pour chaque participant. Daskalákis (avec Cai et Weinberg) a fourni une méthode générale pour transformer les problèmes de mécanismes d'incitation multidimensionnels en de simples problèmes de conception d'algorithmes, développant ainsi des outils mathématiques qu'il a utilisés (avec Deckelbaum et Tzamos) pour faire des progrès significatifs dans la caractérisation des mécanismes multidimensionnels optimaux, un domaine qui est resté ouvert pendant

plusieurs décennies. La technique sous-jacente repose sur une nouvelle et puissante interprétation géométrique d'une collection de grands problèmes d'optimisation implicites au cœur de la transformation.

Outre ses travaux sur les questions à l'interface de l'informatique théorique et de la théorie économique, Daskalákis a produit des travaux dans un nombre impressionnant de domaines de l'informatique théorique. Il a notamment résolu (avec Mossel et Roch) une conjecture fondamentale dans la reconstruction des arbres phylogénétiques et a récemment relevé des défis dans la théorie de l'apprentissage automatique, avec notamment (en collaboration avec Tzamos et Zampetakis) de nouvelles garanties globales pour l'heuristique bien connue d'espérance-maximisation à partir des statistiques pour les mélanges de deux gaussiennes dont la covariance est connue.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

Combien de temps faut-il pour résoudre un problème sur un ordinateur ? Cette question apparemment anodine, à laquelle il est impossible de répondre en général, est au cœur de la théorie de la complexité informatique. Profondément ancré dans les mathématiques et la logique, ce domaine de recherche cherche à comprendre la limite entre les problèmes qui peuvent être résolus efficacement par ordinateur et ceux qui ne peuvent pas l'être.

La théorie de la complexité est l'une des branches les plus dynamiques et les plus inventives de l'informatique. Constantínos Daskalákis se distingue comme l'une de ses jeunes lumières les plus brillantes. Ses travaux ont transformé la compréhension de la complexité informatique d'une multitude de problèmes fondamentaux dans la théorie des jeux, des marchés, des enchères et d'autres structures économiques. Sa grande curiosité, son ingéniosité technique et ses connaissances théoriques approfondies ont permis à Daskalákis d'apporter de nouvelles perspectives à ces problèmes.

Sa première contribution exceptionnelle est issue de sa thèse de doctorat et se situe à la frontière de la théorie des jeux et de l'informatique. La théorie des jeux modélise les interactions d'agents rationnels (individus, entreprises, gouvernements...) dans des situations de conflit, de concurrence ou de coopération. L'un des concepts fondamentaux de la théorie des jeux est celui d'équilibre de Nash. Un jeu atteint un équilibre de Nash si chaque agent adopte la meilleure stratégie possible, en tenant compte des stratégies des autres agents, de sorte qu'aucun

agent ne soit incité à changer de stratégie. Le concept porte le nom du mathématicien John F. Nash, qui a démontré en 1950 que tous les jeux ont des équilibres de Nash. Ce résultat a eu une influence profonde sur l'économie et a valu à Nash le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en 1994.

La théorie des jeux est largement applicable, non seulement en économie, mais aussi dans des domaines tels que les relations internationales et la biologie. Il est évident qu'il serait utile de disposer d'un moyen de calculer efficacement les équilibres de Nash, afin de prédire ce que les agents stratégiques pourraient faire. C'est ainsi qu'une longue série de recherches a débuté, peu après que Nash eut démontré son théorème, où les chercheurs ont développé des algorithmes pour calculer les équilibres de Nash. Au début des années 2000 cependant, aucun de ces algorithmes n'était connu pour être efficace et certains s'étaient révélés inefficaces. On a alors soupçonné que le problème du calcul d'un équilibre de Nash pourrait être insoluble. Et s'il est insoluble, il n'y a aucune raison de s'attendre à ce que les équilibres soient toujours découverts par des agents stratégiques, c'est-à-dire par des êtres humains dotés d'un cerveau limité. Une telle conclusion réduirait les attentes quant à la capacité de l'équilibre de Nash à prédire le comportement humain.

Les questions de calculabilité sont souvent considérées dans le contexte du paradigme bien connu $P \neq NP$, qui a vu le jour dans les années soixante-dix et qui est rapidement devenu un thème central de la théorie de la complexité. En gros, P représente la classe des problèmes faciles à résoudre par ordinateur, ce qui signifie que l'on connaît un algorithme efficace pour les résoudre. La classe NP contient en revanche des problèmes réputés difficiles à résoudre, ce qui signifie que si l'on dispose d'un candidat pour la solution, il existe un moyen efficace de la vérifier, mais qu'on ne connaît aucun algorithme efficace pour trouver des solutions.

Les problèmes NP tirent leur difficulté de la possibilité qu'une solution n'existe pas. En revanche, pour le problème du calcul d'un équilibre de Nash, la démonstration de Nash garantit l'existence d'une solution. Pour cette raison, le problème de l'équilibre de Nash n'entre pas dans le paradigme $P \neq NP$. En 1994, Christos Papadimitriou a défini une nouvelle classe de complexité appelée PPAD, adaptée aux problèmes tels que celui de l'équilibre de Nash, pour lesquels il existe toujours des solutions et pour lesquels on ne connaît aucun algorithme efficace pour calculer les solutions. PPAD signifie « argument de parité

polynomial pour les graphes orientés » et fait référence à un certain argument standard utilisé pour démontrer des résultats d'existence en combinatoire. L'argument est une version orientée d'un résultat connu sous le nom de « lemme des poignées de main ». La classe PPAD contient tous les problèmes de calcul dont l'existence de la solution peut être démontrée à l'aide de ce lemme.

L'un des problèmes les plus importants de la classe PPAD est une version informatique d'un résultat de mathématiques pures appelé « théorème du point fixe de Brouwer ». Ce théorème stipule qu'une fonction continue d'une boule dans elle-même ne peut pas déplacer tous les points : au moins un point doit rester fixe sous l'effet de la fonction. Démontré par L. E. J. Brouwer en 1911, ce résultat fondamental est à la base d'innombrables démonstrations en mathématiques, y compris la démonstration de Nash de l'existence d'équilibres. La démonstration de Brouwer est non constructive, c'est-à-dire qu'elle garantit l'existence de points fixes mais ne montre pas comment les trouver. La version informatique du théorème de Brouwer sur les points fixes demande un algorithme pour trouver les points fixes. Dans son article de 1994, Papadimitriou a montré que cette version informatique est « PPAD-complète », ce qui signifie qu'elle est dans PPAD et que tout problème PPAD s'y réduit, ou en d'autres termes qu'elle est exactement aussi difficile que PPAD.

Dix ans plus tard, Daskalákis est devenu doctorant de Papadimitriou et a commencé à travailler sur le problème de l'équilibre de Nash. Il a fait une grande avancée lorsqu'il a démontré avec Papadimitriou et Paul Goldberg que le problème de l'équilibre de Nash est équivalent sur le plan informatique au problème de la recherche des points fixes de Brouwer et qu'il est donc également PPAD-complet. En montrant que le problème de l'équilibre de Nash est insoluble, les travaux de Daskalákis et de ses collaborateurs rompent l'universalité des équilibres de Nash : on ne peut pas s'attendre à ce que les équilibres de Nash résultent toujours d'interactions entre des agents stratégiques, parce que ces agents ne peuvent pas effectuer des calculs irréalisables. Dans ce sens pratique, les équilibres de Nash n'existent pas toujours.

Ce travail permet également de comprendre pourquoi un algorithme efficace pour le problème de l'équilibre de Nash a été si difficile à trouver. Si l'on examine le cœur des algorithmes mis au point pour calculer les équilibres de Nash, on constate que la structure caractéristique de la classe PPAD se cache à l'arrière-plan. Les travaux de Daskalákis et de ses collaborateurs ont montré que cette structure est inévitable.

Tout en apportant de nouvelles perspectives conceptuelles et techniques, leurs travaux ont également souligné la nécessité de disposer d'algorithmes pratiques qui permettent de calculer efficacement les équilibres pour d'importantes sous-classes de jeux. Dans des travaux ultérieurs, Daskalákis a produit des résultats significatifs sur l'approximation des équilibres de Nash, qui ont à leur tour inspiré d'autres chercheurs.

Le deuxième grand domaine dans lequel Daskalákis a apporté des contributions remarquables est connexe à une branche de l'économie appelée « théorie des mécanismes d'incitation ». Un « mécanisme » est un ensemble d'incitations proposées pour amener les agents à se comporter d'une certaine manière. Les mécanismes d'incitation sont en quelque sorte l'inverse de la théorie des jeux : la théorie des jeux tente d'analyser le comportement des agents dans un jeu, alors que les mécanismes d'incitation visent à concevoir un jeu qui offre les bonnes incitations aux agents afin d'obtenir un résultat souhaitable.

Le modèle le plus élémentaire de mécanisme est la vente aux enchères. L'exemple le plus simple est une vente aux enchères avec un seul article à vendre. Comment concevoir les règles de l'enchère pour maximiser le profit ? En 1981, l'économiste Roger Myerson a apporté une réponse complète et élégante à cette question pour une enchère à un seul article, ainsi que pour d'autres types d'enchères dans lesquelles les préférences de chaque enchérisseur peuvent être résumées par un seul nombre. Ces enchères sont dites « unidimensionnelles ».

Les travaux de Myerson ont eu un impact majeur sur l'économie et ont stimulé un grand nombre de recherches ultérieures. Ses idées ont été appliquées à une multitude de domaines, tels que les enchères sur les droits de forage, les enchères sur les fréquences de télécommunications et les enchères en ligne. Le prix de la Banque de Suède en sciences économiques a récompensé en 2007 la théorie des mécanismes d'incitation et a été décerné conjointement à Myerson, Leonid Hurwicz et Eric Maskin.

Il existe d'autres types d'enchères, où plusieurs articles sont proposés à la vente, où les articles peuvent être regroupés et où la valeur que les enchérisseurs attribuent aux regroupements ne peut être exprimée par un seul nombre. Contrairement à notre connaissance approfondie des enchères unidimensionnelles, ces enchères multidimensionnelles sont restées mal comprises. En fait, on ne sait pas comment vendre de manière optimale ne serait-ce que deux articles à un seul acheteur. À mesure que le nombre d'acheteurs et d'articles augmente, le nombre

de modèles d'enchères possibles augmente rapidement et devient très complexe. Les modèles optimaux, lorsqu'ils peuvent être trouvés, présentent souvent des propriétés contre-intuitives et peuvent être très sensibles aux détails des préférences des enchérisseurs.

Daskalákis s'est penché sur ce sujet d'une complexité déconcertante à partir de 2011. L'un des plus grands défis consistait à comprendre l'ensemble de tous les modèles d'enchères possibles. Daskalákis et ses étudiants de l'époque, Yang Cai et Matt Weinberg, ont mis au point des méthodes ingénieuses pour exploiter l'optimisation linéaire afin de découvrir la structure de cet ensemble. Grâce à cette structure, ils ont mis au point une méthode qui permet de traduire un problème de mécanisme d'incitation en un problème de conception d'algorithme. Ils ont alors pu construire des algorithmes efficaces sur le plan informatique pour obtenir des mécanismes optimaux. L'équilibre trouvé dans ce travail entre les points de vue structurel et informatique s'est avéré particulièrement fructueux et a permis d'obtenir des résultats puissants.

Les nouvelles idées développées dans ce travail ont permis à Daskalákis, Alan Deckelbaum et Christos Tzamos de réaliser d'autres avancées. Ils ont obtenu de nouveaux résultats dans un domaine des mathématiques connu sous le nom de théorie du transport optimal et ont utilisé ces résultats pour caractériser mathématiquement la structure des mécanismes optimaux à plusieurs articles dans le cadre d'un acheteur unique.

L'aspect le plus précieux des travaux de Daskalákis dans le domaine des mécanismes d'incitation a été de défricher un problème qui était auparavant considéré comme inabordable. Parce qu'ils sont théoriques, les résultats doivent être simplifiés avant de pouvoir être appliqués directement à des problèmes concrets. Des chercheurs, y compris Daskalákis, ont déjà commencé à explorer les moyens d'adapter ces résultats structurels et algorithmiques afin de remplacer l'optimalité par la simplicité et la robustesse.

Outre ses travaux sur le problème de l'équilibre de Nash et sur les mécanismes d'incitation, Daskalákis a contribué à plusieurs autres domaines, notamment à l'apprentissage automatique, à la statistique et à la théorie des probabilités, ainsi qu'à la bioinformatique. Dans ce dernier domaine, une tâche majeure est la reconstruction d'arbres phylogénétiques à partir de données moléculaires. En 2011, avec Elchanan Mossel et Sébastien Roch, Daskalákis a publié une démonstration d'une conjecture centrale en phylogénie mathématique qui concerne les conditions particulières dans lesquelles les arbres évolutifs peuvent

être reconstruits. Ses travaux les plus récents portent sur la statistique en grande dimension et les fondements théoriques de l'apprentissage automatique.

Le travail de Constantínos Daskalákis montre qu'il n'a pas peur de s'attaquer à des problèmes difficiles, complexes et qui ont résisté depuis longtemps. Il s'intéresse de près à leurs détails concrets et utilise l'intuition ainsi acquise pour synthétiser les idées structurelles et techniques qui fournissent la clé des avancées théoriques. Son talent de chercheur, sa curiosité et son enthousiasme contagieux font de lui un chef de file naturel dans ce domaine. Âgé de 37 ans à peine, Daskalákis est certain de conserver ce rôle dans les décennies à venir.

# Prix Līlāvatī : Ali Nesin

> « pour sa contribution exceptionnelle à la sensibilisation du public aux mathématiques en Turquie, en particulier pour son travail inlassable dans la création du « village des mathématiques », un lieu exceptionnel et paisible pour l'enseignement, la recherche et l'exploration des mathématiques pour tous ».

Ali Nesin est né à Istanbul en 1957 et a commencé une carrière universitaire en mathématiques en étant un chercheur remarquable. Il a obtenu son diplôme en France à l'université Paris-VII, son doctorat à l'université Yale en 1985, et a occupé plusieurs postes temporaires dans des universités prestigieuses aux États-Unis (Berkeley, Notre Dame, Irvine).

À la mort en 1995 de son père, le célèbre écrivain Aziz Nesin, il a pris une décision réfléchie et est retourné dans son pays natal, la Turquie. Au lieu de poursuivre sa carrière universitaire aux États-Unis, il a décidé qu'il était souhaitable et utile de contribuer au développement des mathématiques en Turquie. Il a poursuivi l'œuvre de son père en tant que directeur de la fondation Nesin, une institution à but non lucratif dont l'objectif est d'offrir des possibilités d'éducation aux enfants qui n'en avaient pas eu. Il a créé le village des mathématiques Nesin, qui est aujourd'hui la principale activité de la fondation.

Depuis son retour en Turquie, il s'est consacré au développement de la reconnaissance des mathématiques en tant qu'élément de la culture turque moderne. Ses activités pour sensibiliser la société turque aux mathématiques sont nombreuses :

— il a été le fondateur et le rédacteur en chef de *Matematik Dünyası* (« Le monde des mathématiques »), un magazine de vulgarisation des mathématiques en turc, principalement destiné aux lycéens ;
— il est membre du comité éditorial de *NTV-Bilim*, un journal de vulgarisation scientifique turc ;
— il est l'auteur de neuf ouvrages de vulgarisation mathématique (par exemple *Mathématiques et jeux*, *Mathématiques et nature*, *Mathématiques et infini*, *Mathématiques et vérité*) et de nombreux articles de vulgarisation mathématique parus dans plusieurs périodiques ;

— plusieurs livres de cours et monographies d'Ali Nesin ont été récompensés et recommandés par l'Académie des sciences de Turquie.

Ses livres, ses revues de vulgarisation, son travail éditorial, ses articles, ses conférences publiques et ses activités sur Internet ont eu une influence considérable sur l'épanouissement d'une nouvelle génération de mathématiciens turcs.

Cependant, ce qui rend le travail de Nesin unique et va au-delà de toutes les activités envisagées pour le prix Līlāvatī, c'est la création, l'organisation et le développement du village des mathématiques, en dépit de conditions économiques et politiques difficiles. Le village des mathématiques Nesin est un site situé au sud d'Izmir, près de l'ancienne ville grecque d'Éphèse, entièrement consacré à la formation mathématique d'élèves doués à tous les niveaux, de l'école primaire à l'université, et qui constitue également un lieu important pour les conférences internationales. Gizem Karaali, dans la revue *The Mathematical Intelligencer*, le décrit sans doute de la manière la plus appropriée comme « une expérience peut-être unique de construction d'une communauté mathématique dans l'un des endroits les plus inattendus de la planète ».

La contribution d'Ali Nesin à l'enseignement des mathématiques et à leur vulgarisation a véritablement transformé la culture turque en ce qui concerne l'image et la reconnaissance des mathématiques.

# Le congrès de 2022

# Médaille Fields : Hugo Duminil-Copin

> « pour avoir résolu des problèmes anciens dans la théorie probabiliste des transitions de phase en physique statistique, en particulier en dimension 3 et 4. »

Hugo Duminil-Copin a transformé la théorie mathématique des transitions de phase en physique statistique et a résolu plusieurs problèmes ouverts anciens, en particulier en dimension 3 et 4 ainsi que dans des cas non intégrables en dimension 2. Son travail a ouvert plusieurs nouvelles directions de recherche. Nous ne décrivons ici que quelques-uns de ses nombreux résultats dans ce domaine.

Les résultats les plus marquants de Duminil-Copin concernent les modèles de type Ising en dimensions 3 et 4. Avec des collaborateurs, il a établi la continuité et le caractère abrupt de la transition de phase en dimension 3, qui étaient des problèmes ouverts depuis les années quatre-vingt. En dimension 4, avec Aizenman, il a démontré le comportement critique de champ moyen du modèle d'Ising et de manière remarquable la trivialité de la théorie quantique des champs scalaires euclidiens en dimension 4, qui était une conjecture ouverte en physique depuis les années soixante-dix.

De même, pour la percolation de Fortuin-Kasteleyn (FK) dépendante en deux dimensions, Duminil-Copin et ses collaborateurs ont démontré la continuité ou la discontinuité de la transition pour toutes les valeurs des paramètres, ainsi que l'universalité du modèle FK critique sur les graphes isoradiaux. En outre, en démontrant l'invariance rotationnelle à grande échelle pour les modèles FK critiques, il a fait un pas important vers l'établissement de leur invariance conforme à grande échelle, qui à son tour fournirait l'ingrédient manquant pour les relier rigoureusement au monde des théories conformes des champs en dimension 2.

### Vulgarisation (par Rachel Thomas)

« J'ai toujours été en équilibre entre ces deux passions, sans vraiment savoir comment les concilier », explique Duminil-Copin en décrivant son attirance pour la physique et les mathématiques. Comme beaucoup d'enfants, il voulait comprendre comment le monde fonctionnait et pourquoi il fonctionnait ainsi. Mais il était également très attiré par la

pureté et la certitude rassurantes des démonstrations mathématiques, où l'on peut construire un « château qui ne s'effondre pas, qui n'est pas fait de cartes ».

Bien qu'il ait choisi d'étudier les mathématiques, Duminil-Copin a rapidement découvert avec bonheur le domaine de la physique statistique, où la théorie des probabilités est utilisée pour comprendre les phénomènes physiques.

### *Transitions de phase et universalité*

Duminil-Copin a été récompensé pour son travail qui a transformé la théorie mathématique des transitions de phase en physique statistique. Les transitions de phase nous sont familières, comme par exemple avec l'eau qui se transforme en glace quand la température descend en dessous de zéro degré. Une transition de phase se produit lorsqu'un système complexe, comme un ensemble de molécules d'eau, subit un changement radical de comportement lorsqu'un paramètre, en l'occurrence la température, passe un certain point critique.

« Ce que nous faisons en tant que mathématiciens, c'est que nous essayons de comprendre comment ces transitions de phase se produisent en construisant des caricatures mathématiques du phénomène physique », explique Duminil-Copin. Un exemple de pareille caricature mathématique (aussi appelée modèle mathématique) est l'utilisation d'un réseau régulier pour décrire l'arrangement du système que vous essayez de comprendre. En réalité, il n'y a pas de véritables contraintes sur les positions des molécules dans l'eau liquide, elles ne sont pas disposées régulièrement dans l'espace d'une manière que l'on pourrait décrire de façon réaliste en utilisant les points d'un réseau. Mais pour étudier ce système, il est souvent plus simple d'imaginer que les molécules sont régulièrement positionnées de cette manière.

Bien qu'une telle hypothèse soit profondément irréaliste, Duminil-Copin estime que l'étude du système de cette manière permet d'expliquer les phénomènes qui se produisent réellement. « Il s'agit d'un phénomène très profond, l'universalité, que j'essaie de comprendre comme un mathématicien. »

L'universalité est presque un vœu pieux devenu réalité : dans certaines situations, les détails de votre modèle mathématique n'affectent pas son comportement global. En effet, si un système implique de nombreux processus aléatoires différents, tels que de nombreuses molécules d'eau en mouvement, les détails des mécanismes sous-jacents ne

devraient pas avoir d'importance. Dans l'exemple de la transformation de l'eau en glace, vous pouvez choisir la disposition des molécules que vous voulez — supposons qu'elles soient positionnées régulièrement selon un réseau de votre choix — et la transition de phase que vous étudiez aura les mêmes propriétés quel que soit votre choix de réseau.

"C'est très rassurant pour les mathématiciens et les physiciens, car cela signifie que de nombreux systèmes ont finalement le même comportement, et vous pouvez choisir l'exemple le plus simple parmi ces systèmes, à savoir ceux qui se trouvent sur un réseau". D'un point de vue mathématique, on peut tirer beaucoup plus de cette description beaucoup plus simple du problème. Le modèle mathématique n'est pas nécessairement représentatif de la réalité physique, mais grâce à l'universalité, vous obtiendrez les mêmes résultats que si vous aviez commencé par une description physiquement exacte.

### *De beaux problèmes*

La physique statistique offre des problèmes qui attirent particulièrement Duminil-Copin : ceux qui sont faussement simples à énoncer mais qui nécessitent de nouvelles mathématiques pour être résolus. L'une des premières conjectures dont il a pris connaissance lorsqu'il était postdoctorant en est un exemple.

« Imaginez que vous êtes devant une ruche », dit Duminil-Copin. L'avant de la ruche forme un pavage hexagonal du plan, et les coins et les segments qui marquent les murs de la ruche forment les points et les bords d'un réseau hexagonal en nid d'abeille. Imaginez que vous choisissiez un point de départ dans le réseau et que vous traciez ensuite votre chemin à travers le réseau en suivant une règle simple : vous ne pouvez pas revenir à un endroit du réseau où vous êtes déjà allé. C'est ce qu'on appelle une marche auto-évitante.

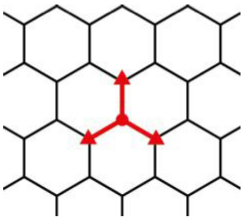


Fig. 4 – *Il y a trois marches auto-évitantes de longueur 1.*

Où pouvez-vous aller ? Vous avez trois choix pour votre premier pas. Ensuite, vous n'aurez que deux choix pour votre deuxième pas, car vous ne pouvez pas revenir sur vos pas. Et pour des raisons similaires, vous avez deux choix pour chacun de vos troisième, quatrième et cinquième pas. Mais à partir du sixième pas, les choses commencent à se compliquer et vous devez être plus prudent, car vous risquez de créer des boucles complètes d'hexagones.

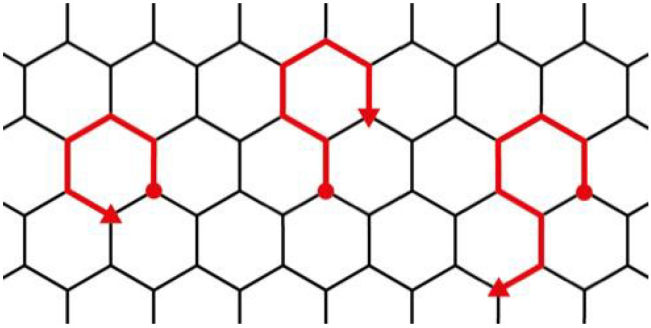


Fig. 5 – *Exemples de marches auto-évitantes de longueur 5, 6 et 7*

On peut se faire une idée personnelle de la complexité de réfléchir à toutes les marches auto-évitantes possibles pour ces nombres d'étapes relativement faibles. Comme le dit Duminil-Copin, les règles sont si simples qu'un enfant peut les appliquer, mais la complexité du problème apparaît rapidement. Il est clair que le nombre de marches auto-évitantes possibles augmente de façon exponentielle avec le nombre de pas effectués, mais au fur et à mesure que l'on fait des pas, il devient de plus en plus difficile de suivre ce nombre en essayant de s'assurer que l'on ne revient jamais sur ses pas. « On se rend compte très vite qu'on ne peut pas calculer exactement ce nombre, c'est un nombre très difficile à appréhender. »

Ce problème n'est pas seulement une distraction amusante. Dans les années 1940, les chimistes Paul Flory (qui a reçu le prix Nobel de chimie en 1974) et W. J. C. Orr ont présenté les marches auto-évitantes comme un moyen d'étudier les longues chaînes de molécules (les polymères) et de comprendre leur comportement. « C'est très lié aux phénomènes physiques, par exemple en essayant de comprendre ce que font les polymères, tels que les molécules d'ADN. Ces polymères sont auto-évitants pour des raisons évidentes : il s'agit de longues chaînes

| $n$ : nombre de pas | nombre de marches auto-évitantes de longueur $n$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | $2 \times C_1 = 6$ |
| 3 | $2 \times C_2 = 12$ |
| 4 | $2 \times C_3 = 24$ |
| 5 | $2 \times C_4 = 48$ |
| 6 | $2 \times C_5 - 3 \times 2 = 90$ |
| 7 | $2 \times C_6 - 3 \times 2 = 17$ |

Tab. 1 – *Dénombrement des premières marches auto-évitantes*

de molécules qui ne peuvent pas se trouver au même endroit. »

Il n'existe pas de réponse exacte à la question de savoir à quelle vitesse le nombre de marches auto-évitantes augmente sur un réseau, qu'il s'agisse du réseau en nid d'abeilles auquel nous avons pensé ci-dessus, d'un réseau carré ou triangulaire dans le plan ou d'un réseau cubique dans l'espace tridimensionnel. Parmi ces réseaux, le réseau en nid d'abeilles est le seul pour lequel nous pouvons obtenir une réponse très proche. En 1980, le spécialiste de physique statistique Bernard Nienhuis a conjecturé que le taux de croissance du nombre de marches auto-évitantes sur un réseau en nid d'abeille est environ

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^n$$

pour un nombre de pas $n$ grand.

« J'ai trouvé vraiment fantastique qu'il y ait une réponse, et c'est un chiffre vraiment chouette ! » explique Duminil-Copin. « C'est une conjecture dont j'ai entendu parler pour la première fois dans mon cours de maîtrise. J'en ai discuté avec mon directeur de thèse et nous avons tous les deux convenu que c'était une très mauvaise idée d'essayer de la démontrer. »

Comme la conjecture implique de compter des choses, on pourrait penser que la démonstration devrait faire appel à la combinatoire, un domaine des mathématiques où il s'agit de compter. Mais la réponse est venue d'un domaine mathématique très différent. Duminil-Copin travaillait sur des problèmes d'analyse complexe, apparemment sans rapport avec les marches auto-évitantes, lorsqu'il a commencé à comprendre certaines des idées soulevées par la conjecture. « À un moment

donné, cela a fait boule de neige et nous avons obtenu cette démonstration intéressante », explique-t-il. « C'est un exemple typique des problèmes que nous rencontrons dans notre domaine et qui sont inspirés par de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique. Cela vous place au carrefour de nombreux domaines [et] c'est quelque chose que j'aime beaucoup. »

### *Davantage de symétrie au point critique*

Duminil-Copin est très heureux de travailler à la croisée des chemins entre les mathématiques et la physique. Au départ, ce sont les physiciens qui ont le plus progressé dans la compréhension des transitions de phase, mais « aujourd'hui, c'est presque l'inverse, la [contribution] mathématique est très forte. »

Les progrès récents de Duminil-Copin et de ses collègues dans la compréhension de ce que l'on appelle l'invariance conforme, un ensemble particulièrement riche de symétries qui peuvent être présentes dans un modèle mathématique qui décrit un système physique, en sont un exemple. La raison pour laquelle les symétries sont utiles est qu'elles réduisent la quantité d'informations nécessaires pour décrire le modèle. Pour décrire un échiquier, par exemple, il suffit de dire que les cases noires et blanches sont disposées en réseau de manière à ce que les couleurs alternent. Si l'on peut réduire la quantité d'informations nécessaires à la description d'un modèle, cela signifie également que le comportement du modèle aux points critiques peut être décrit plus précisément.

La démonstration de l'invariance conforme a été un domaine de recherche très actif. Mais depuis l'an 2000, on n'a pu démontré l'invariance conforme que pour une poignée de modèles particuliers, par exemple pour quelques types particuliers de réseaux. « La liste des modèles avec invariance conforme se comptait sur les doigts d'une main », explique Duminil-Copin.

Pour faciliter les choses, Duminil-Copin et ses collègues n'ont considéré que des modèles à deux dimensions, plutôt qu'un espace tridimensionnel complet. « Pour les mathématiciens, la compréhension de l'invariance conforme en deux dimensions a tellement progressé qu'elle éclaire désormais la théorie physique d'un jour nouveau », explique-t-il.

Pour simplifier encore, ils se sont concentrés uniquement sur les symétries de rotation. Pour comprendre ce que cela signifie, prenons

l'exemple des marches auto-évitantes sur un réseau en nid d'abeille. Supposons que vous vous intéressiez au nombre de marches auto-évitantes entre un point de départ et un point d'arrivée sur votre réseau. Il est évident que ce nombre sera le même si vous faites pivoter votre point d'arrivée d'un tiers de tour autour du point de départ. Il s'agit simplement d'une symétrie inhérente au réseau lui-même.

« L'une des propriétés merveilleuses des systèmes au point critique, c'est-à-dire lorsque des transitions de phase se produisent, est que le système acquiert davantage de symétries », explique Duminil-Copin. Par conséquent, on pensait qu'un système subissant une transition de phase deviendrait invariant par rotation de n'importe quel angle, et pas seulement selon l'angle évident que l'on observe loin du point critique.

Duminil-Copin et ses collègues ont pu fournir une démonstration mathématique rigoureuse de cette symétrie de rotation pour un groupe de modèles beaucoup plus large. De plus, leurs méthodes pourraient fournir l'ingrédient manquant qui pourrait conduire à des démonstrations de l'invariance conforme, avec toute la puissance mathématique que cela impliquerait.

### *Partager les mathématiques*

Les mathématiques, de par leur nature, facilitent la collaboration : il n'est pas nécessaire de disposer d'un vaste appareil expérimental pour démontrer ses idées, il suffit d'en parler autour d'un café. Et la collaboration est un élément clé du travail de Duminil-Copin en tant que mathématicien. L'interaction avec des personnes ayant des expériences différentes, des personnes qui peuvent voir votre travail sous un angle différent, peut transformer un problème totalement voué à l'échec en une idée merveilleuse. « C'est ce type d'interaction constante et d'amélioration des idées de chacun qui fait des mathématiques ce qu'elles sont aujourd'hui. »

Duminil-Copin considère sa médaille Fields comme une reconnaissance pour tous ceux qui travaillent dans son domaine et pour les travaux qu'ils développent ensemble, et il est impatient de partager enfin cette reconnaissance avec ses collaborateurs lorsque les prix seront annoncés au Congrès international des mathématiciens. « Les mathématiques sont une activité très sociale, bien plus que les gens ne le croient », déclare-t-il. « Il y a cette image du mathématicien comme héros solitaire, mais dans mon cas, ce n'est pas une vision de mes mathématiques ou de ma façon de faire des mathématiques. Mon travail ne se ferait pas

sans cette interaction avec les autres. »

**Bibliographie**


— « Entretien avec Hugo Duminil-Copin », CultureMath, 2023.
— « Un entretien avec Hugo Duminil-Copin », *Gazette de la Société mathématique de France*, 2023, nº 177, p. 42-49.
— Cerf (Raphaël), « Autour des travaux d'Hugo Duminil-Copin », Journées CPGE-ENS 2023 autour des travaux des médailles Fields 2022.
— Curien (Nicolas), « Hugo Duminil-Copin et les transitions de phase », *Images des mathématiques*, 2017.
— Duminil-Copin (Hugo), « La marche aléatoire auto-évitante », IHÉS, 2016.
— Duminil-Copin (Hugo), « Chemins auto-évitants sur le réseau en nid d'abeille », Institut Henri-Poincaré, 2016.
— Duminil-Copin (Hugo), « Comment compter les chemins auto-évitants », Institut Henri-Poincaré, 2018.
— Duminil-Copin (Hugo), « Physique statistique planaire et holomorphicité discrète », université de Lille, 2018.
— Duminil-Copin (Hugo), « Comment étudier les interfaces d'un système planaire critique? », Collège de France, 2019.
— Duminil-Copin (Hugo), « Le hasard existe-t-il vraiment? », Université de Genève, 2021.
— Duminil-Copin (Hugo), « Pause mathématique », Espace des sciences, 2023.
— Duminil-Copin (Hugo), « Du café aux mathématiques », Institut Henri-Poincaré, 2023.
— Grimmett (Geoffrey R.), « Les travaux d'Hugo Duminil-Copin », CNRS, 2022.
— Théret (Marie), « Transition de phase abrupte en percolation via des algorithmes randomisés [d'après Duminil-Copin, Raoufi et Tassion] », Séminaire Bourbaki, 2019, exposé nº 1165.

# Médaille Fields : June Huh

> « pour avoir introduit les idées de la théorie de Hodge en combinatoire, pour la démonstration de la conjecture de Dowling-Wilson pour les réseaux géométriques, pour la démonstration de la conjecture de Heron-Rota-Welsh pour les matroïdes, pour le développement de la théorie des polynômes lorentziens et pour la démonstration de la conjecture forte de Mason ».

En utilisant les méthodes de la théorie de Hodge, de la géométrie tropicale et de la théorie des singularités, June Huh et ses collaborateurs ont transformé le domaine de la combinatoire géométrique.

June Huh et Botong Wang ont utilisé les outils de la géométrie algébrique et de la théorie de l'intersection pour démontrer la conjecture de Dowling-Wilson pour les matroïdes réalisables.

Karim Adiprasito, June Huh et Eric Katz ont découvert des analogues combinatoires de la théorie de Hodge et ont démontré le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann pour des matroïdes arbitraires. Ils ont utilisé ces résultats pour résoudre la conjecture de Heron-Rota-Welsh sur la log-concavité du polynôme caractéristique d'un matroïde.

Petter Brändén et June Huh ont développé la théorie des polynômes lorentziens, reliant l'analyse convexe continue et discrète via la géométrie tropicale. Ils ont démontré la conjecture forte de Mason pour les matroïdes et ont découvert des applications dans différents domaines des mathématiques, de la géométrie algébrique projective aux modèles de Potts en mécanique statistique.

### Vulgarisation (par Marianne Freiberger)

Il est tentant de considérer tous les mathématiciens brillants comme des prodiges. Ils ont excellé très tôt dans cette matière, ont remporté tous les prix de mathématiques à l'école et ont vu leur chemin vers le succès se dessiner devant eux.

June Huh est étonnamment différent. À l'école primaire, ses notes en mathématiques n'étaient pas excellentes, et au lycée, il s'ennuyait tellement qu'il préférait écrire de la poésie. Lorsqu'il a finalement

trouvé le chemin des mathématiques, ce n'est pas le sujet en lui-même qui l'a attiré, mais une personne. À l'époque où Huh était sur le point d'obtenir son diplôme de physique et d'astronomie à l'université nationale de Séoul, il a remarqué que le célèbre mathématicien Heisuke Hironaka donnait un cours magistral. « Je ne connaissais rien aux [mathématiques], mais j'avais lu l'autobiographie de Hironaka. C'est une personne intéressante, alors je me suis inscrit. »

Le cours s'est avéré être une réflexion en temps réel sur les recherches que Hironaka menait à l'époque, en rapportant les idées qu'il avait littéralement eues la veille. « C'était la première fois que je voyais quelqu'un faire des mathématiques, explique Huh. C'était mon premier contact avec les mathématiques en tant qu'activité humaine. » C'est l'excitation de cette activité humaine qui a fasciné Huh.

### *Compter et voir*

La façon dont Huh parle de ses mathématiques est magnifiquement intuitive. N'ayant pas reçu de formation mathématique poussée, il a commencé sa carrière en se concentrant sur des objets « visibles à l'œil nu », comme il le dit lui-même. « De nombreux domaines des mathématiques modernes sont tellement développés que pour comprendre les questions centrales de ces domaines, il faut investir plusieurs années, explique Huh. C'est comme étudier le type d'astronomie que l'on ne peut faire qu'avec un télescope à un million de dollars. »

La combinatoire est un domaine des mathématiques qui n'est pas comme ça : l'art de compter les choses qui se prêtent au dénombrement, parce qu'il n'y en a qu'un nombre fini et qu'elles sont discrètes. Une question typique en combinatoire pourrait être de savoir combien de façons il y a d'ordonner un jeu de cartes. « Tous les objets sont tangibles, on peut presque les voir et les toucher, explique Huh. La combinatoire était la partie des mathématiques qui était visible à mes yeux. »

Si le dénombrement peut être considéré comme un pilier des mathématiques — c'est l'une des premières choses mathématiques que nous avons faites en tant qu'enfants et en tant qu'espèce à l'aube de l'humanité — l'autre pilier doit être la géométrie. « La géométrie est commune à tous les êtres humains, explique Huh. Nous sommes des créatures visuelles, la vision est notre premier organe sensoriel. Nous comprenons le monde qui nous entoure grâce à la géométrie, plutôt que par le son, le goût ou l'odorat. »

S'il est possible de multiplier les dénombrements sans se heurter

à des difficultés conceptuelles, la géométrie est un peu plus difficile à appréhender. La forme d'une pomme de terre noueuse est quelque chose que nous comprenons immédiatement lorsque nous la voyons, mais lorsqu'il s'agit de la décrire sans images, nous sommes rapidement pris au dépourvu. « La géométrie est très difficile à formaliser, explique Huh. Elle contient de grandes quantités d'informations, surtout si on la compare à la complexité de notre langage et de notre logique. »

Une sorte de miracle se produit cependant lorsque l'on s'autorise à utiliser des équations. L'équation $y = x$, par exemple, définit exactement une ligne droite située dans le plan. Le lien vient du fait que l'on dote chaque point du plan d'une paire de coordonnées $(x, y)$ et que l'on marque ensuite tous les points dont les coordonnées satisfont à l'équation. Selon la même méthode, l'équation $y = x^2$ définit une parabole.

De même, d'autres équations définissent d'autres types de formes. Contrairement aux pommes de terre noueuses, les formes définies par des équations peuvent être étudiées à l'aide des outils de l'algèbre. Le domaine des mathématiques qui s'en charge s'appelle la géométrie algébrique.

« En géométrie algébrique, pour spécifier un espace [géométrique], il suffit d'écrire une équation, et ce n'est même pas une équation compliquée, explique Huh. Vous pouvez l'écrire sur votre bloc-notes et la regarder. C'est quelque chose que vous pouvez toucher. C'est le seul type d'espace sur lequel je pouvais vraiment mettre la main, du moins au début [de ma carrière]. C'est pourquoi la géométrie algébrique m'a également attiré. »

### *Un minimum*

Les mathématiques pour lesquelles Huh est récompensé par une médaille Fields sont profondes et difficiles, et portent notamment sur les variétés algébriques et la théorie de Hodge. Mais lorsque nous avons demandé à Huh de citer un résultat dont il était particulièrement fier, il a indiqué quelque chose qui peut en fait être expliqué en termes plus simples. Ce résultat jette un pont entre le continu et le discret. Il est également intéressant en dehors des mathématiques.

Pour illustrer le résultat, revenons à l'équation d'une parabole que nous avons déjà mentionnée plus haut : $y = x^2$. Une caractéristique importante d'une parabole est qu'elle n'a qu'un seul minimum. La raison pour laquelle la parabole n'a qu'un seul minimum est que la

courbe n'est pas bombée vers le bas. Cela contraste avec la courbe de la figure 6 (donnée par une expression plus complexe) qui présente un bombement qui produit deux minima locaux.

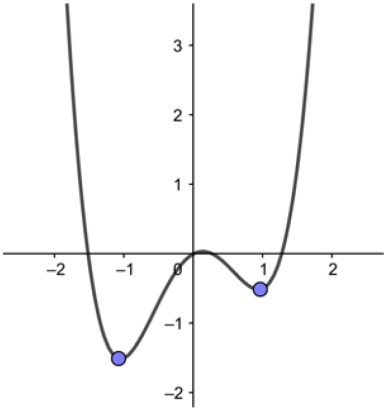



Fig. 6 – *La droite horizontale donne la coordonnée $x$ d'un point et la droite verticale la coordonnée $y$. La courbe représentée est donnée par l'équation $y = x^4 - 2x^2 + \frac{x}{2}$. Les points bleus sont des minima locaux.*

Une autre façon de le dire est que la région située au-dessus de la parabole est convexe, alors que la région située au-dessus de la courbe de la figure 6 ne l'est pas. Formellement, une région est convexe si l'on peut relier deux points quelconques qui en font partie par un segment entièrement contenu dans la région). La fonction qui décrit la parabole est une fonction convexe. Le deuxième exemple est une fonction non convexe.

La notion de convexité existe également lorsqu'une fonction comporte plus d'une variable. Pour une fonction de deux variables, elle correspond à un paysage ne comportant qu'une seule vallée, par opposition à une chaîne de montagnes plus complexe. Pour les dimensions supérieures, il n'est pas possible de tracer un graphique, mais la notion de convexité peut tout de même être définie.

### *Trouver l'optimum*

Les fonctions convexes sont importantes, car de nombreux problèmes de la vie réelle impliquent de minimiser quelque chose. Par exemple, si vous construisez une voiture, vous voulez minimiser la

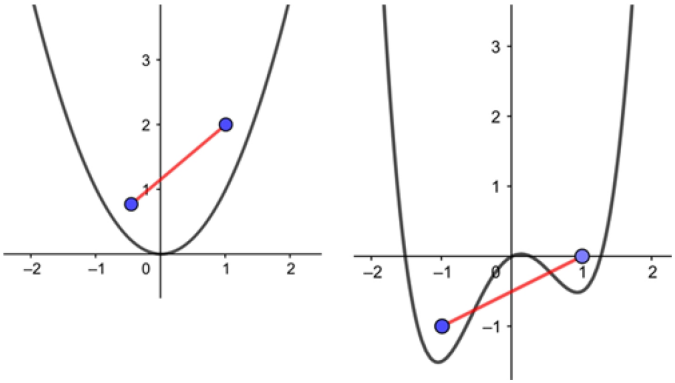



Fig. 7 – *La fonction de gauche est convexe, celle de droite ne l'est pas.*

consommation de carburant, qui dépend d'autres variables telles que le poids de la voiture et la traînée aérodynamique. Si l'on vous donne une fonction mathématique qui décrit la consommation de carburant en fonction de ces variables, votre tâche consiste à trouver le minimum de cette fonction. S'il s'agit d'une fonction complexe, qui peut comporter de nombreuses variables, la recherche de ce minimum est loin d'être aisée.

Si toutefois votre fonction est convexe, la tâche devient beaucoup plus facile, car les fonctions convexes n'ont qu'un seul minimum. Il est facile de trouver cette valeur en utilisant des techniques qui reviennent à « tâter » le chemin vers le bas : même si vous ne pouvez pas voir le graphique affiché devant vous, vous pouvez tâter de quel côté se trouve le bas, aller un peu dans cette direction et tâter à nouveau. Ces techniques fonctionnent également lorsque la fonction a plus de variables et qu'il n'est donc pas possible de dessiner le graphique.

Lorsqu'il s'agit de fonctions non convexes, la technique du tâtement peut vous tromper : elle peut vous amener à un minimum parmi d'autres, mais vous ne pouvez pas être sûr qu'il ne s'agit pas simplement d'un petit creux plutôt que du minimum global que vous recherchez.

### *Construire des ponts*

L'analyse convexe est un outil précieux pour résoudre les problèmes d'optimisation. L'ennui, c'est qu'elle suppose que les objets concernés

soient continus. Si, au lieu d'être assis sur une courbe continue, vous êtes assis sur une petite île séparée d'autres îles, vous ne pouvez rien tâter.

« Mais bien sûr, notre monde devient de plus en plus numérique [c'est-à-dire discret], explique Huh. Souvent, nous voulons optimiser un certain problème discret et pour cela, nous avons besoin de techniques très différentes. » Bien que les chercheurs en optimisation aient développé un cadre appelé analyse convexe discrète pour traiter les problèmes discrets, les deux domaines, jusqu'à récemment, n'étaient pas explicitement liés. « Les domaines [discret et continu] sont analogues, mais il n'y avait pas de liens directs entre eux », explique Huh.

Ce que Huh a fait avec des collègues, c'est trouver un tel lien en changeant ingénieusement de point de vue. L'équation $y = x^2$ décrit une courbe continue, mais elle est elle-même définie par une quantité finie d'informations discrètes. C'est pourquoi nous pouvons l'écrire si facilement. Tout ce dont nous avons besoin, c'est de savoir quelles puissances des variables $x$ et $y$ sont impliquées, quels sont les coefficients de ces puissances et où se trouve le signe égal. Vous pouvez donc considérer l'équation comme un objet discret.

En s'appuyant sur ce point de vue, Huh et Petter Brändén ont développé une théorie profonde qui s'applique aux équations connues sous le nom de polynômes de Lorentz. Pour les polynômes de Lorentz, les deux points de vue sur la convexité, l'un s'appliquant au cadre continu et l'autre au cadre discret, sont naturellement liés par les deux points de vue différents sur les polynômes : en tant qu'objet continu d'une part et en tant qu'objet discret d'autre part.

« La découverte de cette passerelle formelle a été très gratifiante, déclare Huh. Ce qui était encore plus agréable pour nous, c'est qu'une fois que vous avez trouvé cette passerelle, vous pouvez aborder des problèmes qui étaient considérés comme très techniques et difficiles d'une manière très naturelle et facile. »

### *Les mathématiques comme miroir*

Les grandes avancées en mathématiques se produisent souvent lorsque quelqu'un établit un lien entre des domaines apparemment différents. D'une certaine manière, Huh ne pense pas que nous devrions être surpris par ces liens. « Ce n'est pas surprenant parce que la subdivision des domaines [mathématiques], ou la subdivision de l'intuition humaine — combinatoire, géométrique et analytique — n'est que le

résultat de millions d'années d'expérience en tant qu'espèce et du type d'organes sensoriels dont nous disposons. Si nous étions un autre type de créature, avec d'autres organes sensoriels et un autre type d'environnement, nous aurions probablement développé des domaines mathématiques complètement différents. »

Si les frontières entre les domaines des mathématiques sont accidentelles, il n'est pas surprenant que certaines des questions les plus profondes en mathématiques les transcendent. En ce sens, les mathématiques que nous développons sont un miroir de notre humanité. « Elles montrent qui nous sommes et comment nous pensons. »

**Bibliographie**


— Amini (Omid), « Autour des travaux de June Huh », Journées CPGE-ENS 2023 autour des travaux des médailles Fields 2022.
— Brugallé (Erwan), « La conjecture de Heron-Rota-Welsh : un théorème d'Adiprasito-Huh-Katz », *Gazette de la Société mathématique de France*, 2023, nº 177, p. 25-35.
— Chambert-Loir (Antoine), « Relations de Hodge-Riemann et combinatoire des matroïdes [d'après K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz] », Séminaire Bourbaki, 2018, exposé nº 1144. [vidéo]
— Chambert-Loir (Antoine), « Les travaux de June Huh », CNRS, 2022.

# Médaille Fields : James Maynard

> « pour ses contributions à la théorie analytique des nombres, qui ont permis des avancées majeures dans la compréhension de la structure des nombres premiers et dans le domaine de l'approximation diophantienne ».

James Maynard a apporté des contributions spectaculaires à la théorie analytique des nombres. Son travail est très ingénieux et a souvent conduit à des percées surprenantes sur des problèmes importants qui semblaient inaccessibles par les techniques actuelles.

Certaines des questions les plus célèbres de la théorie des nombres concernent la distribution des nombres premiers. Alors que la distribution à grande échelle des nombres premiers est régie par le théorème des nombres premiers (et plus précisément, mais de manière conjecturale, par l'hypothèse de Riemann), de nombreux problèmes naturels portent sur des échelles petites (ou éparses). Maynard a obtenu de nombreux résultats remarquables dans cette direction. Par exemple, alors que la suite des nombres premiers devient généralement de plus en plus clairsemée, il a montré qu'il existe une infinité d'« amas de nombres premiers », de toute taille $m$ fixée, chacun contenu dans un intervalle borné (la borne dépend nécessairement de $m$). Il s'agit d'une nette amélioration par rapport au célèbre résultat de Zhang Yitang obtenu quelques mois auparavant, qui concernait le cas $m = 2$. La méthode de Maynard, à la fois élégante et puissante, a repoussé les limites de la théorie des cribles d'une manière particulièrement surprenante. Dans une direction apparemment opposée, Maynard a ensuite montré que les nombres premiers sont parfois beaucoup plus clairsemés que la moyenne, un problème d'Erdős bien connu sur lequel aucun progrès qualitatif n'avait été réalisé depuis des décennies.

Maynard a également effectué un travail fondamental dans le domaine de l'approximation diophantienne, en démontrant avec Koukoulopoulos la conjecture de Duffin-Schaeffer. Cette conjecture, qui date de 1941, peut être considérée comme la généralisation ultime du théorème de Khintchine, qui décrit dans quelle mesure un nombre réel typique peut être approché par des nombres rationnels.

**Vulgarisation (par Rachel Thomas)**

« La théorie des nombres a toujours eu un statut un peu spécial dans mon esprit, même avant que je ne l'étudie formellement », déclare Maynard. La théorie des nombres, c'est-à-dire l'étude des nombres entiers et de la manière dont ils peuvent être combinés entre eux, a fourni à Maynard un terrain de jeu scientifique qui lui a permis de poursuivre sa fascination d'enfant.

Au cœur de la théorie des nombres se trouvent les nombres premiers, c'est-à-dire les nombres qui ne sont divisibles que par eux-mêmes et par 1. En raison de cette indivisibilité, ils sont souvent décrits comme les atomes de la théorie des nombres. Tous les autres nombres entiers peuvent être « fabriqués » à partir de ces atomes, dans la mesure où ils peuvent être écrits sous la forme d'un produit de nombres premiers. Le nombre 24 par exemple peut s'écrire $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, et le nombre 110 peut s'écrire $110 = 2 \times 5 \times 11$. De la même manière, tous les autres nombres entiers peuvent s'écrire comme un produit de nombres premiers.

***La conjecture des nombres premiers jumeaux***

Une célèbre question reste sans réponse dans la théorie des nombres : la conjecture des nombres premiers jumeaux. Nous savons depuis deux mille ans qu'il existe une infinité de nombres premiers, mais il n'y a pas de schéma perceptible dans la façon dont ils sont répartis le long de la droite des nombres. « En règle générale, les écarts entre les nombres premiers augmentent au fur et à mesure que l'on parcourt la droite des nombres », explique Maynard. « Mais la conjecture des nombres premiers jumeaux dit que même si les écarts sont généralement plus grands, il arrive que les nombres premiers soient très proches les uns des autres. Il est essentiel de comprendre les écarts entre les nombres premiers pour comprendre la distribution des nombres premiers. »

À l'exception du nombre 2, tous les autres nombres premiers sont impairs, de sorte que deux nombres premiers ne peuvent jamais être plus proches l'un de l'autre (une fois que l'on a dépassé le nombre 2) qu'avec une différence de deux. Au début, il est facile de trouver ces paires de nombres premiers aussi proches que possible, appelées nombres premiers jumeaux : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, toutes séparées par une différence de 2. Mais cela devient beaucoup plus difficile au fur et à mesure que l'on parcourt la droite des nombres. Les mathématiciens

pensent qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux. C'est ce que l'on appelle la conjecture des nombres premiers jumeaux.

La conjecture des nombres premiers jumeaux est l'un de ces célèbres problèmes de la théorie des nombres qui sont simples à énoncer et qui fascinent les mathématiciens depuis des centaines d'années, mais dont la démonstration reste toujours hors de portée. Après des siècles d'efforts, une grande avancée a été réalisée en 2013, lorsque Yitan Zhang a démontré qu'il existait une infinité de paires de nombres premiers séparés de 70 millions. « Pour les mathématiciens, il s'agissait d'une avancée considérable, car c'était la première fois que nous disposions d'une démonstration pour un écart fini », explique Maynard. « 70 millions, c'est beaucoup plus que 2, mais c'est beaucoup moins que l'infini. »

La percée de Zhang impliquait des méthodes de crible, qui sont des moyens de filtrer les nombres dans votre démonstration. Un exemple élémentaire est le crible d'Ératosthène, qui permet de filtrer les nombres non premiers jusqu'à 100, par exemple, en rayant tous les multiples de 2, puis tous les multiples du nombre suivant (3), puis les multiples du nombre suivant (5), et ainsi de suite. Le crible de Sundaram filtre également les nombres non premiers, mais il est basé sur des progressions arithmétiques, c'est-à-dire des suites de nombres séparés de leurs voisins par une différence fixe. Un exemple de progression arithmétique est 3, 7, 11, 15, 19... où il y a une différence de 4 entre les voisins de la suite.

Fig. 8 – *Illustration du crible d'Eratosthène, conçu pour retenir les nombres premiers.*

« Les méthodes de crible sont un outil mathématique qui permet de

traduire certaines informations que vous comprenez sur les nombres pour créer des informations que vous aimeriez connaître », explique Maynard. « Par exemple, si vous comprenez certaines questions techniques sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques, vous pouvez les traduire en informations sur les petits écarts entre les nombres premiers. » Les méthodes de crible peuvent sembler faciles à première vue, mais il faut parfois des résultats mathématiques très puissants pour les faire fonctionner. La percée de Zhang a consisté à démontrer des résultats puissants sur les nombres premiers qui pourraient servir de base à la méthode de crible.

L'approche de Maynard était différente : « Plutôt que d'améliorer les données d'entrée de la méthode, j'ai changé la méthode elle-même. Elle est devenue plus efficace dans la transformation d'un type d'information en un autre, ce qui signifie que nous avons eu besoin de données beaucoup plus faibles pour obtenir un résultat sur les écarts entre les nombres premiers. » Grâce à cette nouvelle méthode, il a considérablement réduit l'écart de 70 millions à seulement 600. Après une collaboration intense avec un groupe de mathématiciens, nous savons désormais qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers séparées par un écart de seulement 246.

Même après ces progrès spectaculaires, la démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux n'a toujours pas été apportée. Les travaux se poursuivent, mais impliquent souvent de nouvelles approches. Les travaux de Maynard démontrent par exemple qu'il existe une infinité de nombres premiers sans certains chiffres. Il est difficile de savoir à ce stade quand la conjecture des nombres premiers jumeaux sera finalement démontrée dans son intégralité. D'après Maynard, « il nous manque encore une grande idée pour démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux, mais peut-être ne sommes nous qu'à une grande idée de distance. »

### *Tout ou rien*

La théorie des nombres est riche en conjectures anciennes et en problèmes ouverts. La démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux est peut-être encore loin, mais Maynard a récemment démontré une autre conjecture importante avec son collègue Dimitris Koukoulopoulos.

La conjecture de Duffin-Schaeffer, énoncée pour la première fois en 1941, concerne la possibilité d'approcher des nombres réels avec

des nombres rationnels. Les nombres réels sont composés de nombres rationnels (des nombres qui peuvent être écrits sous la forme d'une fraction $p/q$ pour certains entiers $p$ et $q$) et de nombres irrationnels qui ne peuvent pas être écrits de cette manière. Par exemple, le célèbre nombre $\pi = 3{,}14151...$ est irrationnel et ne peut donc pas être écrit sous forme de fraction. Ce que l'on peut faire en revanche, c'est l'approcher par une fraction. Par exemple, lorsque nous n'utilisons que les deux premières décimales de $\pi$, 3,14, nous l'approchons par la fraction 314/100. Mais cette approximation implique des nombres assez grands. En fait, la fraction 22/7 est une approximation plus précise de $\pi$.

D'après Maynard, « cela signifie que 22/7 est en quelque sorte un moyen plus efficace de saisir certaines informations arithmétiques sur le nombre $\pi$ ». Comprendre les approximations efficaces des nombres réels (également connues sous le nom d'approximations diophantiennes) et la façon dont elles sont distribuées pour les nombres réels peut conduire à des informations très importantes pour les théoriciens des nombres. La conjecture de Duffin-Schaeffer permet de déterminer très facilement si ces approximations efficaces existent ou non.

Supposons que vous vouliez garantir que vos approximations auront une certaine précision, et que cette précision peut varier en fonction du dénominateur $q$ utilisé dans vos approximations $p/q$. La conjecture de Duffin-Schaeffer indique qu'il existe un calcul facile qui vous permet de savoir si vous obtiendrez le type spécifié d'approximations efficaces pour presque tous les nombres ou pour presque aucun d'entre eux.

« La conjecture de Duffin-Schaeffer indique que soit il n'y a que de rares exceptions à cette affirmation concernant les approximations efficaces, soit elle n'est jamais vraie », explique Maynard. « La conjecture vous donne une méthode très simple pour savoir si vous êtes dans un cas ou l'autre. »

Cela peut ne pas sembler très utile à première vue, mais les mathématiciens disposent ainsi d'un outil puissant. « Il y a beaucoup d'énoncés mathématiques que l'on souhaiterait vrais pour absolument tout, mais il s'avère qu'il y a quelques exceptions ennuyeuses », explique Maynard. « Mais si ces exceptions sont suffisamment rares, le résultat nous indique qu'elles n'ont pas d'importance. »

### *Des prix pour jouer*

Les travaux de Maynard sont décrits dans la citation de son prix comme « très ingénieux et ayant souvent conduit à des percées sur-

prenantes sur des problèmes importants qui semblaient inaccessibles par les techniques actuelles ». Mais malgré ses nombreux succès, la médaille Fields reste une surprise. « On ne s'imagine pas recevoir un grand honneur mathématique quand on est assis à son bureau et qu'on s'amuse avec des ficelles mathématiques ! »

Si recevoir l'un des plus grands prix de mathématiques est un immense honneur, Maynard le trouve également intimidant et légèrement surréaliste. « D'une certaine manière, c'est intimidant de penser à mon nom sur cette liste de légendes des mathématiques du passé, des gens que j'admirais quand j'étais enfant et que je pensais aux mathématiciens », explique-t-il. « C'est certainement assez surréaliste de ce point de vue. »

**Bibliographie**


— « Un entretien avec James Maynard », *Gazette de la Société mathématique de France*, 2023, nº 177, p. 36-41.
— Pilatte (Cédric), « Autour des travaux de James Maynard », Journées CPGE-ENS 2023 autour des travaux des médailles Fields 2022.

# Médaille Fields : Maryna Viazovska

> « pour la démonstration que le réseau $E_8$ fournit l'empilement le plus compact de sphères identiques en dimension 8, et pour d'autres contributions à des problèmes extrémaux connexes et à des problèmes d'interpolation en analyse harmonique ».

Un problème très ancien en mathématiques consiste à trouver la manière la plus compacte de placer des sphères identiques dans une dimension donnée. On sait depuis un certain temps que l'empilement hexagonal de cercles est l'empilement le plus dense en dimension 2, tandis que Hales a donné en 1998 une démonstration assistée par ordinateur de la conjecture de Kepler selon laquelle l'empilement cubique à faces centrées donne l'empilement le plus compact en dimension 3. L'empilement le plus compact n'était connu dans aucune autre dimension jusqu'à ce que Viazovska démontre en 2016 que le réseau $E_8$ donne l'empilement le plus compact en dimension 8. Elle a démontré très peu de temps après, en collaboration avec Cohn, Kumar, Miller et Radchenko, que le réseau de Leech donne l'empilement le plus compact en dimension 24. L'approche de Viazovska s'appuyait sur les travaux de Cohn et Elkies, qui avaient utilisé la formule sommatoire de Poisson pour majorer la densité de n'importe quel empilement de sphères en dimension quelconque. Leurs travaux suggéraient qu'en dimension 8 et 24, il pourrait exister une fonction de Schwartz radiale avec des propriétés très spéciales (par exemple, elle et sa transformée de Fourier devraient être nulles aux longueurs des vecteurs dans les empilements respectifs) qui donnerait un majorant égal au minorant provenant d'empilements connus. Viazovska a inventé une méthode entièrement nouvelle pour produire de telles fonctions, basée sur la théorie des formes modulaires.

Viazovska a développé ces idées dans d'autres directions. Avec Radchenko, elle a démontré un résultat inattendu selon lequel toute fonction de Schwartz paire telle qu'elle et sa transformée de Fourier s'annulent à la racine carrée de chaque entier positif ou nul doit être identiquement nulle. En fait, ils ont montré que toute fonction de

Schwartz paire peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[ a_n(x) f\left(\sqrt{n}\right) + b_n(x) \widehat{f}\left(\sqrt{n}\right) \right]$$

pour certaines fonctions spéciales $a_n$ et $b_n$.

Avec Cohn, Kumar, Miller et Radchenko, elle a démontré que le réseaux $E_8$ et le réseau de Leech permettaient non seulement d'obtenir des sphères optimales en dimensions 8 et 24, mais aussi de minimiser l'énergie pour toute fonction potentielle qui est une fonction complètement monotone de la distance au carré.

## Vulgarisation (par Marianne Freiberger)

Viazovska n'est que la deuxième femme à recevoir une médaille Fields, après Maryam Mirzakhani qui l'a obtenue en 2014. Viazovska a reçu la médaille Fields pour une démonstration remarquable liée à un problème que nous connaissons tous dans la vie de tous les jours, ainsi que pour de belles mathématiques liées à des problèmes similaires.

### *Commencer par les oranges*

En matière de transport, les fruits sont peu pratiques. Non seulement ils s'écrasent facilement, mais leurs formes ne se prêtent pas à l'empilement dans des boîtes. Même la forme de fruit la plus simple qui soit, la sphère telle qu'on la trouve dans les oranges et les pommes, pose un problème, car quelle que soit la manière dont on empile les sphères, il y aura toujours des espaces entre elles. Cela soulève une question géométrique : comment disposer les sphères dans une boîte pour être sûr d'en faire entrer le plus possible ? Quelle est la plus grande proportion d'espace que l'on peut remplir avec des oranges ?

Supposons que vous disposiez d'une très grande boîte et de nombreuses sphères. Pour rendre le problème plus facile, supposons que les sphères soient de taille égale et dures, de sorte que nous ne puissions pas les presser. Nous mettons autant de sphères que possible dans la boîte.

Si la boîte est petite, la réponse dépend de la forme de la boîte. Mais si la boîte est très grande, l'effet de la forme est négligeable et la réponse ne dépend que du volume de la boîte. Il est intuitivement clair, même si mathématiquement il faut travailler un peu pour s'en rendre compte,

qu'il existe une proportion maximale d'espace que l'on peut remplir avec des sphères. Le problème de l'empilement des sphères consiste à trouver cette proportion maximale, également appelée constante d'empilement des sphères.

Pour un exemple plus simple, descendons d'une dimension : au lieu de placer des sphères dans l'espace 3D, plaçons des disques dans l'espace 2D. En dimension 2, le meilleur empilement est celui du nid d'abeille. Dans un nid d'abeilles traditionnel, chaque cellule est un hexagone et les hexagones s'emboîtent parfaitement les uns dans les autres sans laisser d'espace entre eux. Si l'on dispose les disques selon le même schéma, on obtient des espaces, mais la densité de l'ensemble est la plus élevée possible. De cette façon, nous couvrirons un peu plus de 90 % de la surface avec ces disques de taille égale. La valeur exacte de la constante d'empilement en deux dimensions est

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}9069.$$

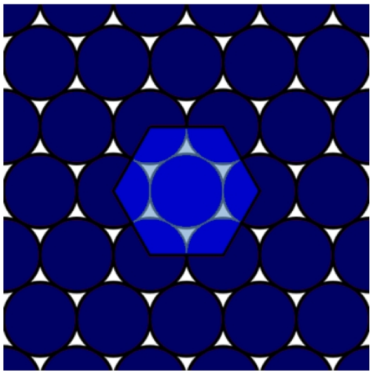


Fig. 9 – *L'empilement hexagonal de disques.*

En dimension 3, le problème était connu sous le nom de conjecture de Kepler et est resté ouvert pendant près de 400 ans. Ici, il n'y a pas un seul empilement optimal, mais plusieurs empilements tout aussi bons les uns que les autres. L'un d'entre eux est visible sur le marché, où les oranges sont empilées en pyramides (voir la figure ci-dessous, qui illustre ce phénomène avec des balles plutôt qu'avec des oranges). La densité de cet empilement est d'environ 74 %. La valeur précise de la constante d'empilement de sphères en dimension 3 est

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}7405.$$

La démonstration que l'on ne peut vraiment pas faire mieux n'est arrivée qu'en 1998, lorsque le mathématicien Thomas Hales a produit 250 pages de démonstration mathématique traditionnelle, complétées par plus de 3 gigaoctets de code informatique et de données pour effectuer les calculs nécessaires. Cette approche était controversée. Étant donné qu'aucun être humain ne pouvait vérifier ces calculs informatiques au cours de sa vie, les mathématiciens n'étaient pas sûrs que le travail de Thomas Hales pût réellement être considéré comme une démonstration. Un groupe d'experts a finalement décidé qu'ils étaient sûrs à 99 % que c'était le cas. Depuis lors, la démonstration a été vérifiée à l'aide de la logique informatique formelle.

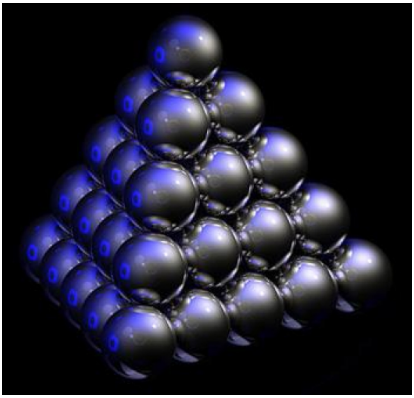


Fig. 10 – *Ceci est un empilement cubique à faces centrées, l'un des empilements avec la densité maximale en dimension 3.*

***Les dimensions supérieures***

Les démonstrations de Viazovska, qui ne nécessitent pas d'ordinateur et ne remplissent que quelques pages, sont aussi solides qu'elles peuvent l'être. Elles consistent à placer des sphères de dimensions supérieures dans des espaces de dimensions supérieures, à savoir des espaces de dimensions 8 et 24. Cette entreprise peut sembler à la fois inutile et impossible à comprendre, mais ce n'est pas le cas. Les sphères de dimensions supérieures sont importantes dans les technologies de la communication, car elles garantissent que les messages que nous envoyons via Internet, un satellite ou un téléphone peuvent être compris même s'ils ont été brouillés en cours de route.

Pour vous familiariser avec les dimensions supérieures, rappelez-vous l'époque où vous passiez à l'école de la géométrie en dimension 2

à la géométrie en dimension 3. Si vous faisiez partie des nombreuses personnes qui ont du mal à visualiser les choses en 3D, vous avez apprécié l'aide de l'algèbre. Les points en trois dimensions sont donnés par trois coordonnées, et les formes telles que les droites, les plans ou les sphères par des équations qui font intervenir les coordonnées. Si vous ne parvenez pas à visualiser la relation entre les formes, vous pouvez utiliser les équations pour vous aider.

Le même principe s'applique aux dimensions supérieures. Les points dans un espace à n dimensions sont donnés par n coordonnées. Par analogie avec les dimensions 2 et 3, on peut définir des notions de distance et de volume, ainsi que des formes telles que les sphères à l'aide d'équations. Bien que vous ne puissiez pas visualiser ces formes, l'algèbre vous permet de les traiter, de sorte que vous pouvez également définir ce que vous entendez par un empilement de sphères et sa densité.

Revenons un instant aux dimensions familières 2 et 3. Vous pouvez voir comment un empilement 3D peut être réalisé à partir d'un empilement 2D : commencez par des sphères disposées selon le motif en nid d'abeille qui donne la meilleure densité pour les disques en 2D et empilez une autre couche de sphères au-dessus, de sorte que les sphères de la deuxième couche s'insèrent dans les creux entre les sphères de la première couche. Ajoutez ensuite une troisième couche, puis une quatrième, etc. Cette méthode permet d'obtenir un empilement en 3D avec une densité optimale. Il est donc tentant de penser que cette sorte d'empilement peut également fonctionner dans des dimensions supérieures.

Hélas, ce n'est pas le cas. Connaître la densité la plus élevée dans une dimension ne permet pas de savoir ce qu'elle devrait être dans la suivante. Le graphique ci-dessous montre la densité des groupements les plus denses que nous connaissions pour les dimensions 4 à 26, mais il ne s'agit peut-être pas des groupements les plus denses possibles. Le graphique suggère, et cela s'avère vrai, que la densité de l'empilement des sphères diminue de manière exponentielle à mesure que la dimension augmente.

### *Recherche de bornes*

Lorsque vous essayez de trouver un nombre qui atteint une sorte de maximum, comme la densité d'empilement la plus élevée, mais que vous n'avez pas beaucoup de chance, une approche consiste à abaisser votre barre et à ne chercher qu'une borne supérieure : dans notre cas, un

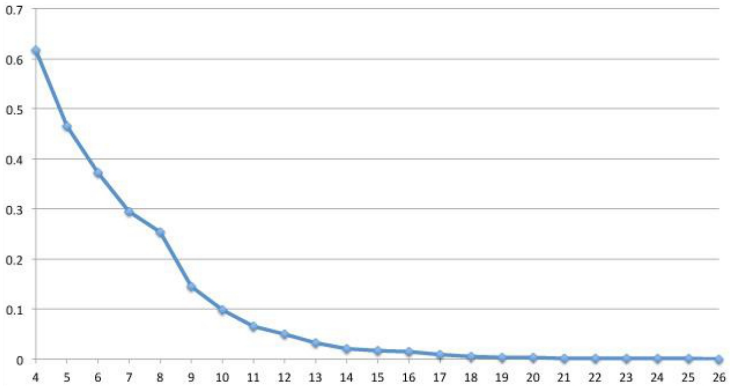



Fig. 11 – *La densité des meilleurs empilements de sphères connus en dimension 4 à 26.*

nombre dont vous pouvez démontrer que la constante d'empilement ne peut pas le dépasser.

Diverses bornes supérieures pour les densités d'empilement étaient connues depuis un certain temps. Mais en 2003, Henry Cohn et Noam Elkies ont proposé une recette particulièrement intéressante pour en trouver en toute dimension. La recette étant difficile à mettre en pratique, Cohn et Elkies n'ont pu qu'approcher les bornes supérieures associées pour les dimensions qui vont jusqu'à 32. Le résultat est illustré dans la figure 12 avec les meilleures valeurs connues pour la densité d'empilement pour les dimensions 4 à 12 et 20 à 28.

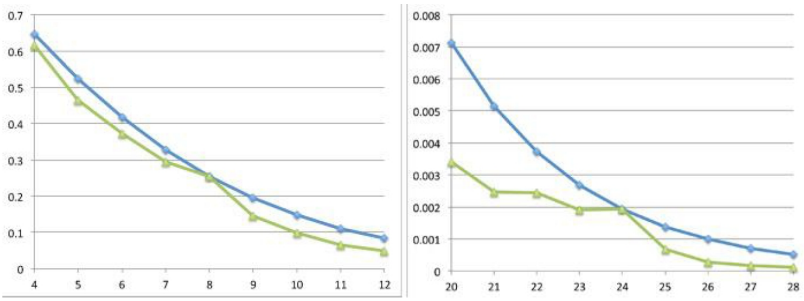



Fig. 12 – *La borne supérieure de Cohn-Elkies (en bleu) et la meilleure densité d'empilement connue (en vert) pour les dimensions 4 à 12 et 20 à 28.*

Ce qui est frappant ici, c'est que pour les dimensions 8 et 24, les deux graphiques semblent coïncider. Si elles coïncident réellement, alors les empilements les plus denses que nous connaissions dans ces dimensions sont également les plus denses en général, et leur densité sera la constante d'empilement de sphères. Mais Cohn et Elkies n'ont pas été en mesure de le démontrer : il restait la possibilité ennuyeuse qu'il existe des empilements plus denses, dont les densités tombent dans les écarts invisibles et minuscules entre les deux graphiques. « Ce n'est pas un scénario plausible pour quiconque a foi en la beauté des mathématiques, mais la foi n'équivaut pas à une démonstration », a écrit Cohn dans un article publié dans les *Notices* de la Société mathématique américaine.

### *Combler l'écart*

Les travaux de Viazovska, qui ont permis de combler l'écart pour la dimension 8 et ont ensuite été étendus à la dimension 24 avec l'aide de Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller et Danylo Radchenko, s'appuient sur la pièce maîtresse des travaux de Cohn et Elkies. Si l'on oublie les sphères d'un empilement de sphères et que l'on ne considère que leurs centres, on se retrouve avec une configuration de points. Plutôt que de donner les coordonnées de tous les points, on peut également caractériser la configuration par les statistiques des distances entre les points : quelle est la plus petite distance qui se produit, à quelle fréquence se produit-elle, etc.

Il s'agit d'une approche fructueuse, souvent utilisée en physique. « Les astronomes procèdent également de la sorte », explique Viazovska. « Ils observent les étoiles et calculent les distances entre les différentes étoiles, puis oublient la géométrie de l'espace et ne se souviennent que des statistiques des distances par paire. »

Il s'avère que ces statistiques doivent répondre à certaines restrictions. Si vous voulez avoir tant d'étoiles à telle distance, tant d'étoiles à telle distance et tant d'étoiles à telle autre distance, il n'est peut-être pas possible de le réaliser dans l'espace.

Dans un esprit similaire, Cohn et Elkies ont montré que les statistiques de distance pour un empilement de sphères doivent également satisfaire à certaines restrictions, qui à leur tour donnent une borne supérieure pour la densité d'un empilement. Pour être sûr que les restrictions sont réellement satisfaites, il faut cependant trouver une fonction mathématique ayant des propriétés particulières, ce qui n'est

pas facile à faire. Cohn et Elkies n'ont pu qu'approcher ces fonctions, ce qui explique pourquoi ils n'ont pu qu'approcher les bornes supérieures que l'on peut théoriquement obtenir à partir de leur recette.

**L'empilement de sphères du réseau $E_8$**

Les sphères dans cet empilement de dimension 8 sont centrées en des points dont les coordonnées sont soit toutes entières, soit toutes à mi-chemin entre deux entiers, et telles que la somme des coordonnées soit un nombre pair. Le rayon des sphères est $1/\sqrt{2}$.

Le réseau $E_8$ est lié au groupe de Lie exceptionnel $E_8$. Comme le nom le suggère, ce groupe est un objet exceptionnel en mathématiques. Ce n'est donc peut-être pas surprenant qu'il soit lié à un empilement de sphères exceptionnel.

Pour trouver la constante d'empilement de sphères en dimension 8 (et plus tard 24), Viazovska a dû aller plus loin. Elle a dû trouver une « fonction magique » qui non seulement donne une borne supérieure, mais montre également que cette borne supérieure est optimale, c'est-à-dire qu'elle est égale à la densité du meilleur empilement que nous connaissions en dimension 8. Cohn et Elkies pensaient qu'une telle fonction devait exister, mais n'avaient aucune idée de la manière de la trouver. « Les fonctions magiques semblaient sortir de nulle part », écrit Cohn dans l'article cité ci-dessus.

C'est ce que Viazovska a réussi à faire : en utilisant une « construction audacieuse » à laquelle personne n'avait pensé auparavant, elle a trouvé une fonction qui se comportait exactement comme il le fallait.

Grâce à ce résultat, Viazovska a démontré que la densité la plus élevée possible d'un empilement de sphères en dimension 8 est

$$\frac{\pi^4}{384} \approx 0{,}25367,$$

ce qui signifie qu'environ 25 % de l'espace 8D peut être rempli par des sphères de même taille qui ne se chevauchent pas.

L'empilement qui donne cette densité (et qui est indiqué comme le meilleur empilement connu dans le graphique ci-dessus) s'appelle l'empilement de sphères du réseau $E_8$. Nous ne pouvons pas le visualiser parce qu'il vit en dimension 8, mais nous pouvons le décrire assez facilement grâce aux coordonnées des centres de toutes les sphères

(voir l'encadré ci-dessus). L'empilement qui donne la densité la plus élevée en dimension 24 s'appelle l'empilement de sphères du réseau de Leech. Il est similaire, mais plus complexe, que l'empilement du réseau $E_8$. Sa densité vaut

$$\frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0{,}001929.$$

### *Des dimensions mystérieuses*

Qu'est-ce qui rend les dimensions 8 et 24 si spéciales ? « Tout le monde demande ce que les dimensions 8 et 24 ont de spécial, je ne sais pas, c'est un mystère », a confié Viazovska en 2018. « Nous avons ces deux configurations extrêmement remarquables dans ces dimensions, que nous n'avons pas dans d'autres dimensions. Les configurations sont si bonnes que les méthodes qui échouent dans toutes les autres dimensions donnent une estimation optimale dans ces dimensions. Si vous me demandez pourquoi, je ne sais pas. »

Cependant, la simple démonstration pour la dimension 8 et celle qui a suivi pour la dimension 24 ont été suffisamment spectaculaires pour que Viazovska reçoive l'une des plus hautes distinctions en mathématiques. Quelle que soit la solution pour les autres dimensions, elle vaudra probablement à son découvreur un autre prix prestigieux.

## Bibliographie


— « Entretien avec Maryna Viazovska », CultureMath, 2023.
— « Maryna Viazovska, Fields 2022 », CNRS, 2022.
— Cohn (Henry), « Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères », (trad. M. Bourrigan), *Gazette des mathématiciens*, 2019, n° 162, p. 21-38.
— Fermanian Kammerer (Clotilde), « Empilements de sphères et codage de l'information », *Images des mathématiques*, 2020.
— Gontier (David), « Empilement de sphères/boules – Résultats de Maryna Viazovska », Journées CPGE-ENS 2023 autour des travaux des médailles Fields 2022. [vidéo]
— Meyer (Yves), « Mesures cristallines et applications », Séminaire Bourbaki, 2022, n° 1194.
— Michel (Philippe), « Les travaux de Maryna Viazowska », CNRS, 2022.

# Prix Gauss : Elliott Lieb

> « pour des contributions mathématiques profondes d'une ampleur exceptionnelle qui ont façonné les domaines de la mécanique quantique, de la mécanique statistique, de la chimie computationnelle et de la théorie de l'information quantique. »

Elliott H. Lieb est un spécialiste de physique mathématique qui a apporté des contributions exceptionnelles à la physique, à la chimie et aux mathématiques pures.

Comme Gauss et comme d'autres géants des XVIIIe et XIXe siècles, Lieb a démêlé des structures mathématiques élégantes et fondamentales, motivé par des problèmes de physique et de leurs applications, dépassant largement les motivations initiales.

Ce faisant, Lieb a introduit des concepts qui ont façonné des champs entiers de recherche en mathématiques, même au-delà de son domaine d'origine, tout en ayant un impact déterminant sur la physique et la chimie.

Les travaux qu'il a menés dans les années soixante pour découvrir la résolution exacte de certains modèles fondamentaux (modèle de glace carrée, modèles de Lieb-Liniger, de Lieb-Mattis, de Temperley-Lieb) ont contribué à la définition d'une grande partie de la mécanique statistique moderne et aux fondements du domaine moderne des probabilités intégrables. Ses solutions exactes aux problèmes de percolation et de coloration, en introduisant au passage ce que l'on appelle aujourd'hui l'algèbre de Temperley-Lieb, ont également eu des implications algébriques et combinatoires durables, pour les invariants de nœuds, les groupes quantiques, les groupes de tresses et les statistiques de tresses, ainsi que pour la théorie conforme des champs.

Lieb a développé tout un programme d'analyse de la stabilité de la matière et de l'existence de la limite thermodynamique en fondant sur des bases mathématiques solides l'étude des particules quantiques qui interagissent par l'intermédiaire de potentiels physiquement réalistes. Un ingrédient essentiel de cette analyse est la célèbre inégalité de Lieb-Thirring qui estime la somme des valeurs propres négatives des opérateurs de Schrödinger. Cette inégalité a eu un impact énorme au

fil des ans sur les estimations spectrales, en particulier sur l'analyse semi-classique.

La théorie de la fonctionnelle de la densité (TFD) est l'un des outils de calcul les plus importants de la chimie moderne. Lieb en a fourni une formulation mathématiquement solide, la célèbre fonction de Lieb ou de Levy-Lieb, la plus utilisée en chimie théorique. Un concept très important en TFD consiste à comprendre ce que l'on appelle l'énergie de Coulomb indirecte. Lieb, en partie en collaboration avec Oxford, a donné des limites rigoureuses à cette énergie, fournissant une référence ultime pour toutes les formes suggérées de l'énergie indirecte. Ces limites très importantes ont été abondamment utilisées et citées par les chimistes.

Lieb a démontré plusieurs résultats célèbres dans le domaine de l'analyse matricielle, y compris ce qui est devenu le théorème de concavité de Lieb. En conséquence de ce dernier, Ruskai et lui ont pu démontrer la forte sous-additivité de l'entropie de von Neumann, un résultat qui, des décennies plus tard, est devenu le résultat fondateur du domaine moderne très actif de la théorie de l'information quantique.

Lieb a apporté des contributions fondamentales aux domaines de l'analyse fonctionnelle et des inégalités fonctionnelles. Il a démontré une longue liste de nouvelles inégalités fonctionnelles, dont certaines portent désormais son nom, comme l'inégalité de Brascamp-Lieb, et a donné à des inégalités existantes leur forme définitive, comme l'inégalités de Young et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev. Il a développé et appliqué de façon magistrale des méthodes de symétrisation et de compacité. Ces travaux de Lieb sont largement utilisés par les analystes, les probabilistes et les spécialistes de physique mathématique et continuent d'avoir un impact considérable sur les mathématiques.

Le travail d'Elliott Lieb présente une combinaison vraiment exceptionnelle : en tant que travail mathématique, ses contributions ont un impact difficilement égalable sur d'autres sciences, et en tant que travail appliqué, ses contributions ont une profondeur mathématique difficilement égalable. Il perpétue la tradition d'un dialogue au plus haut niveau entre les mathématiques et la physique, et démontre magnifiquement le pouvoir des mathématiques en tant qu'outil théorique et pratique pour comprendre la nature.

## Vulgarisation (par Allyn Jackson)

Depuis plus de six décennies, Elliott Lieb compte parmi les personnalités les plus influentes de la physique mathématique. Depuis ses premiers travaux à la fin des années 1950 jusqu'à aujourd'hui, il a fait preuve d'une capacité étonnante à percevoir les structures mathématiques qui se trouvent au cœur des systèmes physiques. En élucidant ces structures, il a enrichi à la fois les mathématiques et la physique.

### *Des domaines différents, des objectifs différents*

Les deux domaines ont toujours entretenu une relation symbiotique : les mathématiques fournissent une base rigoureuse pour exprimer les intuitions physiques, et la physique est une source d'inspiration pour les nouvelles mathématiques. Néanmoins, les deux domaines sont très différents dans leurs objectifs, leurs perspectives et leur culture. Lieb est presque le seul à avoir apporté à plusieurs reprises des contributions profondes et novatrices à ces deux domaines. Les deux domaines lui ont décerné les plus hautes distinctions. Rien qu'en 2022, il reçoit non seulement le prix Gauss, mais aussi la la plus haute distinction de la Société américaine de physique.

Lieb est un mathématicien dans la mesure où il applique la plus grande rigueur à des problèmes de physique. Il a produit des résultats mathématiques sur des questions classiques qui, au moment où il les a abordées, n'étaient pas à la mode en physique, mais qui ont eu par la suite un impact dans ce domaine. Un exemple est le travail de Lieb en 1973 avec Mary Beth Ruskai, qui a démontré un résultat clé sur les relations entre certaines caractéristiques des systèmes quantiques. Ce résultat, connu sous le nom de « forte sous-additivité de l'entropie », est aujourd'hui l'une des pierres angulaires du domaine en plein essor de la théorie de l'information quantique.

En même temps, Lieb travaille comme un physicien en ce sens que son objectif principal est de comprendre la réalité physique. Son intuition physique a permis d'identifier de nombreuses idées en physique qui ont ensuite eu un impact significatif sur les mathématiques. Par exemple, en 1976, Lieb et Herm Jan Brascamp ont été amenés par leurs travaux en mécanique statistique à développer un nouvel outil appelé aujourd'hui les inégalités de Brascamp-Lieb. Trente ans plus tard, ces inégalités ont eu un impact majeur dans la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique, et elles apparaissent, ainsi

que leurs proches, dans certains des travaux qui ont valu à Terence Tao une médaille Fields en 2006. Plus récemment encore, les inégalités de Brascamp-Lieb ont eu un impact sur l'informatique théorique.

Avec plus de 400 publications sur des sujets variés, l'œuvre de Lieb est impossible à résumer en peu de temps. Nous nous contenterons ici d'examiner de plus près trois exemples de son travail qui donnent une idée de son goût pour certains problèmes et de son approche pour les résoudre.

### *La glace carrée*

À la fin des années 1950, la physique mathématique s'intéressait surtout à la mécanique classique et à la dynamique. Lieb et d'autres ont ouvert une toute nouvelle voie de recherche en utilisant les outils de l'analyse mathématique pour s'attaquer aux problèmes de la mécanique quantique et de la physique statistique. La solution apportée par Lieb en 1967 au problème de la « glace carrée » en chimie physique en est un exemple frappant.

Lors d'expériences marquantes menées dans les années 1930, des chercheurs ont réussi à amener de la glace à des températures extrêmement basses et à mesurer son « entropie résiduelle ». Cette quantité représente la quantité d'entropie, ou de désordre, qui subsiste malgré la basse température et qui ne peut être expliquée par les vibrations du réseau cristallin des molécules d'eau.

De manière abstraite, on peut se représenter l'eau gelée $H_2O$ comme un réseau tridimensionnel, dans lequel les atomes d'oxygène se trouvent sur les nœuds du réseau et les atomes d'hydrogène sur les lignes reliant les nœuds. Un article publié en 1935 par Linus Pauling proposait ce que l'on a appelé la « règle de la glace ». Dans le réseau abstrait, les liaisons entre les atomes H et O peuvent être représentées par des flèches pointant vers l'intérieur, en direction des atomes O. La règle de la glace stipule que chaque nœud du réseau possède exactement deux flèches pointant vers l'intérieur.

Le nombre de configurations possibles du réseau qui respectent la règle de la glace augmente énormément à mesure que la taille du réseau augmente. C'est cette prolifération de configurations qui produit le désordre, et donc l'entropie résiduelle, dans la glace. Les deux quantités, le nombre de configurations et l'entropie résiduelle, devraient être liées par une expression mathématique simple. Si l'on connaissait le nombre de configurations et si on l'introduisait dans cette expression, cela

correspondrait-il à l'entropie résiduelle mesurée dans les expériences ?

C'est la question que Pauling a posée. Un calcul exact du nombre de configurations était hors de portée. Au lieu de cela, Pauling a procédé à une approximation minutieuse et a constaté qu'elle correspondait très bien à la valeur expérimentale. Ce résultat a été salué comme l'une des plus belles confirmations de la validité de la physique statistique.

Mais comme le résultat reposait sur une approximation, son potentiel n'a pas été complètement exploité. Au milieu des années 1960, Lieb s'est intéressé à la version bidimensionnelle du problème de la glace, appelée « glace carrée ». Dans le modèle de la glace carrée, on dispose d'un réseau bidimensionnel dont les nœuds sont reliés par des flèches qui obéissent à la règle de la glace : chaque nœud a exactement deux flèches entrantes.

En 1967, Lieb a utilisé des idées de combinatoire, ainsi que des concepts importés d'une autre partie de la physique, pour calculer le nombre exact de configurations de la glace carrée. Ce « nombre magique », comme l'a appelé Freeman Dyson, correspondait également à la valeur expérimentale et confirmait la validité de la règle de la glace.

Immédiatement reconnu comme un tournant, ce résultat a inauguré le domaine florissant de ce que l'on appelle aujourd'hui les modèles exactement résolubles, qui se situent à la frontière des mathématiques et de la physique. Lieb a continué à apporter des contributions décisives à ce domaine, dont certaines ont eu par la suite un large impact au sein des mathématiques. Un exemple est une construction connue sous le nom d'algèbre de Temperley-Lieb, que Lieb a inventée avec Neville Temperley et qui a joué un rôle clé dans le travail révolutionnaire en théorie des nœuds qui a valu à Vaughan Jones une médaille Fields en 1990.

### *La stabilité de la matière*

Le résultat de Lieb sur la glace carrée illustre un thème qui a imprégné son travail depuis lors : la recherche d'une compréhension de la matière dans les états d'énergie les plus bas. C'est dans ces états que l'on peut espérer percevoir les structures les plus fondamentales de la matière et les étudier mathématiquement. C'est ce qui a motivé une autre facette de l'œuvre de Lieb que nous allons maintenant examiner, à savoir son travail sur la stabilité de la matière.

Au milieu des années 1960, la théorie de la mécanique quantique, vieille de 40 ans, a été largement confirmée. Mais au cœur de cette

théorie, une question fondamentale restait sans réponse : pourquoi la matière est-elle stable ? Selon la mécanique quantique, les composants de base de la matière sont les électrons et les noyaux chargés positivement. Ces particules chargées de manière opposée devraient simplement imploser et s'effondrer. Mais ce n'est pas le cas. Au contraire, toute la matière qui nous entoure — les pierres, les gens, les arbres — reste stable. La mécanique quantique peut-elle expliquer ce phénomène ?

La première démonstration que la réponse est oui a été apportée en 1967-1968 dans de longs articles de Freeman Dyson et Andrew Lenard. L'objectif était de montrer que l'énergie minimale de N particules ne varie pas comme $N^2$, c'est-à-dire comme le nombre d'interactions entre les particules, mais plutôt comme N. Dyson et Lenard ont atteint cet objectif en montrant que l'énergie minimale est inférieure à une constante multipliée par N. Cependant, en raison d'une accumulation d'approximations inefficaces, cette constante était si énorme, de l'ordre de $-10^{15}$, qu'elle n'avait pas de sens physiquement.

Avec Walter Thirring, Lieb a apporté une démonstration entièrement nouvelle et considérablement améliorée de la stabilité de la matière. D'une longueur de quatre pages seulement, leur article de 1976 était non seulement beaucoup plus simple sur le plan mathématique, mais il jetait également une lumière nouvelle sur la physique. En particulier, ils ont considérablement affiné la constante que Dyson et Lenard avaient cherchée à tâtons. Cela illustre un thème majeur du travail de Lieb, qui consiste à optimiser les constantes pour élucider leur signification physique.

Avec Thirring et d'autres, Lieb a ensuite étudié de manière mathématiquement précise comment la stabilité de la matière est régie par deux principes fondamentaux de la mécanique quantique, le principe d'exclusion de Pauli et le principe d'incertitude de Heisenberg. Ils ont montré comment ces deux principes pouvaient être exprimés de la manière la plus utile dans ce que l'on a appelé l'inégalité de Lieb-Thirring, qui est une vaste généralisation du résultat mathématique classique appelé « inégalités de Sobolev ». L'inégalité de Lieb-Thirring a également trouvé des applications au-delà du problème de la stabilité de la matière.

Ce travail s'est répercuté sur les mathématiques, puisque Lieb et ses collaborateurs ont travaillé à la généralisation et à l'affinement d'inégalités connexes, telles que l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev. Ce faisant, ils ont découvert des symétries qui ont donné une nouvelle signification et une nouvelle utilité à ces outils. Ces travaux ont eu un

impact majeur sur les mathématiques, en particulier dans les domaines de l'analyse et de la géométrie.

### *Le condensat de Bose-Einstein*

Notre troisième exemple tiré des travaux de Lieb concerne un état de la matière appelé condensat de Bose-Einstein, un état qui ne peut être atteint qu'à des températures extrêmement basses, proches du zéro absolu. Dans cet état extraordinaire, les effets de la mécanique quantique, qui n'opèrent normalement qu'au niveau microscopique, apparaissent au niveau macroscopique. De nombreuses propriétés de cet état proviennent de la mécanique quantique et n'ont pas d'analogue classique.

Le phénomène a été prédit au milieu des années 1920 par Albert Einstein, sur la base des idées de Satyendra Nath Bose. Cependant, il a fallu attendre soixante-dix ans pour que la capacité technique de porter la matière à des températures aussi basses soit mise au point. Les physiciens qui ont produit le premier condensat de Bose-Einstein en 1995 ont reçu le prix Nobel pour leur travail. Ce travail historique a déclenché une vague de nouvelles recherches.

C'est au début des années 1960 que Lieb s'est penché pour la première fois sur ce problème. Des travaux antérieurs avaient abouti à une formule pour l'énergie de l'état fondamental dans un condensat de Bose-Einstein. Bien que correcte d'un point de vue physique, cette formule manquait d'une base mathématique rigoureuse. Lieb espérait fournir cette base en démontrant la validité de la formule. En 1963, il est parvenu à obtenir la formule d'une nouvelle manière, apportant ainsi des arguments supplémentaires en faveur de son exactitude. Cependant, il n'a pas été en mesure de démontrer la validité de la formule.

Dans un tour de force qui illustre la persévérance et la vision à long terme de Lieb, il a finalement apporté la preuve quarante ans plus tard, dans un article publié en 1998 avec Jakob Yngvason. Faisant suite aux expériences de 1995, l'article de Lieb-Yngvason a renforcé l'intérêt pour les condensats de Bose-Einstein. Depuis, le sujet est devenu l'un des domaines de recherche les plus actifs de la physique mathématique.

Dans un travail connexe en collaboration avec Ian Affleck, Tom Kennedy et Hal Tasaki, Lieb a inventé et résolu ce que l'on appelle aujourd'hui le système de spins AKLT (d'après leurs initiales). Menés en 1987, ces travaux constituent un premier exemple de système présentant ce que l'on appelle aujourd'hui une phase topologique de la matière,

un sujet d'un grand intérêt actuel.

*Des décennies de recherche*

Au cours de sa longue carrière, Lieb a eu plus de cent co-auteurs. Nombre de ces collaborations ont été intenses et exaltantes, en raison de la prodigieuse énergie intellectuelle de Lieb, de ses immenses capacités de concentration et de son éthique de travail rigoureuse. Ces traits ont également marqué ses interactions avec les jeunes chercheurs, y compris ses dix doctorants, qui ont tous poursuivi une carrière florissante. Certains d'entre eux figuraient sur la liste des orateurs de la conférence organisée en l'honneur du 90e anniversaire de Lieb, qui s'est tenue du 30 juillet au 1er août 2022.

Lieb a également apporté des contributions notables pour soutenir les métiers des mathématiques et de la physique. Il a été président de l'Association internationale de physique mathématique à deux reprises (1982-1984 et 1997-1999). De 1992 à 1995, il a été membre à part entière du conseil de la Société mathématique américaine. Sa probité et son intégrité exceptionnelles lui ont valu d'être nommé en 1994 membre d'un comité chargé de formuler les toutes premières recommandations éthiques de la société.

En façonnant des décennies de recherche en mathématiques et en physique, Elliott Lieb a atteint les racines mêmes de ces deux arbres de la connaissance humaine. Il s'impose comme l'un des grands penseurs de notre temps.

# Médaille Chern : Barry Mazur

> « pour ses découvertes profondes en topologie, en géométrie arithmétique et en théorie des nombres, ainsi que pour son rôle moteur et sa générosité dans la formation de la prochaine génération de mathématiciens ».

Barry Mazur a façonné le paysage moderne de l'arithmétique en s'attaquant aux problèmes les plus difficiles dans ce domaine, en ouvrant de nouvelles voies passionnantes et en guidant des générations de mathématiciens vers de nouveaux terrains fertiles. Ses nombreuses contributions fondamentales le placent carrément parmi les plus grands mathématiciens du XX^e^ siècle.

Sa démonstration de la conjecture de torsion pour les courbes elliptiques donne une liste explicite des possibilités pour les sous-groupes de torsion des courbes elliptiques sur les nombres rationnels. En plus d'être un résultat d'une élégance et d'une précision suprêmes, la démonstration est remarquable par sa méthode, qui applique des méthodes sophistiquées de la géométrie arithmétique, notamment la théorie des schémas de groupes pour la topologie plate et la géométrie des espaces de modules arithmétiques, à l'étude d'une question diophantienne concrète.

L'étude approfondie des propriétés des algèbres de Hecke complétées que ce travail a initiée, ainsi que la théorie des déformations des représentations de Galois dont Mazur a été le pionnier plusieurs décennies plus tard, ont jeté les bases de la démonstration par Andrew Wiles de la modularité des courbes elliptiques et du dernier théorème de Fermat. En effet, elle a permis une avalanche de résultats dans le programme de Langlands et ses applications, ainsi que des avancées dans l'étude des valeurs spéciales des fonctions L suite à la conjecture de Bloch-Kato.

La démonstration de la conjecture principale de la théorie d'Iwasawa par Mazur et Andrew Wiles au début des années 1980 est une autre résultat monumental, qui réalise les zéros de la fonction zêta $p$-adique de Kubota-Leopoldt comme les valeurs propres d'un opérateur naturel agissant sur les groupes de classes d'idéaux des tours cyclotomiques, et qui peut donc être considérée comme l'analogue de l'hypothèse de

Riemann pour les fonctions zêta p-adiques associées aux caractères de Dirichlet.

L'extension des méthodes de la théorie d'Iwasawa au cadre des courbes elliptiques et des motifs plus généraux a été largement menée par Mazur, grâce à sa construction avec Peter Swinnerton-Dyer de la fonction L $p$-adique d'une courbe elliptique modulaire, à sa formulation de la conjecture $p$-adique de Birch et Swinnerton-Dyer avec John Tate et Jeremy Teitelbaum, et à son programme pionnier pour l'étude des variétés abéliennes sur les tours de corps de nombres.

Ces grandes réussites ne sont qu'un échantillon des points forts d'une gamme large, profonde et soutenue de perspectives influentes qui ont enrichi les mathématiques au cours des cinquante dernières années, touchant des sujets tels que le problème de Schoenflies généralisé, les théories de cohomologie $p$-adique, la conjecture de Fontaine-Mazur qui caractérise les représentations galoisiennes $p$-adiques qui apparaissent en géométrie, la théorie des « systèmes d'Euler », et l'étude des points rationnels sur les courbes et les variétés de dimension supérieure, pour n'en citer que quelques-uns.

L'influence de Mazur est renforcée par son rôle de mentor et d'enseignant, avec près de soixante doctorants, dont un grand nombre ont activement et fructueusement poursuivi son vaste héritage intellectuel.

Barry Mazur a une vision extrêmement pluraliste du sujet, dans laquelle la curiosité pure interagit constamment avec l'élaboration de théories visionnaires, et où la recherche de structures profondes pour elles-mêmes est tout aussi importante que les expériences informatiques et la résolution de problèmes difficiles. L'impact qu'il a eu sur les mathématiques illustre de manière spectaculaire le potentiel révolutionnaire d'une telle perspective polyvalente.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

Barry Mazur est une figure singulière de la communauté mathématique internationale. Ses travaux de recherche couvrent plusieurs domaines des mathématiques, de la topologie à la géométrie algébrique en passant par la théorie des nombres, et lui valent d'être considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de notre époque. Sa capacité à passer d'un domaine à l'autre est déjà inhabituelle ; ce qui est extraordinaire, c'est sa perception des analogies profondes entre ces domaines. Ces analogies ont non seulement permis de trouver des solutions à des problèmes complexes, mais elles ont également suscité

le développement de nouveaux domaines de recherche.

Mazur est à bien des égards un mathématicien très concret, qui s'attaque à des problèmes spécifiques et les résout. Il a également la capacité de passer sans effort à des niveaux de généralité plus élevés et à un point de vue abstrait et global. Il peut donc discuter des mathématiques à différents niveaux, ce qui fait de lui un interlocuteur d'une efficacité peu commune. Cette caractéristique, associée à son enthousiasme et à la générosité peu commune avec laquelle il partage ses idées, s'est avérée être un aimant pour les étudiants, les postdoctorants et les collègues, ce qui a amplifié son influence sur le domaine. En outre, son charme et sa convivialité ont fait de lui un membre très apprécié de la communauté mathématique.

Et pourtant, son influence va au-delà de cette communauté. Son intelligence infatigable ne s'arrête pas aux frontières des mathématiques, mais s'étend à la littérature, au droit, à la philosophie et à la physique. Ses nombreux écrits non techniques ont exploré de nouveaux genres pour discuter des idées mathématiques. Il a également franchi les barrières universitaires pour donner des cours en collaboration avec des collègues d'autres domaines.

Pour donner une idée de la richesse et de la diversité de l'œuvre mathématique de Mazur, nous examinerons quelques points forts.

### *L'« astuce de Mazur »*

Dans les années 1950, alors qu'il était doctorant, Mazur a formulé une question profonde sur la nature fondamentale de l'espace. Ce n'est qu'après l'avoir résolue qu'il a découvert qu'il s'agissait d'une question ouverte majeure en topologie, connue sous le nom de problème de Schoenflies.

Une courbe fermée divise le plan en deux régions : la région à l'intérieur de la courbe et la région à l'extérieur. De plus, quelle que soit la complexité et l'ondulation de votre courbe, vous pouvez étirer les bosses pour transformer l'intérieur en disque ; en termes mathématiques, on dit que l'intérieur est homéomorphe à un disque. Le problème de Schoenflies consiste à savoir si des phénomènes analogues se produisent dans des dimensions supérieures. Il suffit d'ajouter une dimension pour rencontrer un obstacle : il est possible de créer une surface si compliquée que son intérieur n'est pas homéomorphe à une boule tridimensionnelle. La sphère cornue d'Alexander en est un exemple célèbre.

Mazur a proposé une légère restriction afin d'exclure les exemples

bizarres tels que la sphère cornue. Il a ensuite répondu par l'affirmative au problème de Schoenflies pour toutes les dimensions. Pour ce faire, il a créé une technique, aujourd'hui appelée « astuce de Mazur », qui élimine les difficultés en les repoussant à l'infini. Apparemment magique mais parfaitement rigoureuse, l'astuce de Mazur était une idée puissante. Comme l'a écrit Valentin Poénaru : « Le travail de Barry, qui traite toutes les dimensions à la fois, a fait l'effet d'un coup de tonnerre et a constitué une révolution psychologique qui, avec d'autres développements, a ouvert la voie à ce qui a suivi dans le domaine de la topologie en grande dimension. »

La topologie est l'étude des formes, appelées variétés, qui peuvent s'étendre, se plier et se déplacer tout en conservant leurs caractéristiques les plus fondamentales, comme le nombre de trous qu'elles comportent. Les premiers travaux de Mazur étaient centrés sur la topologie. Il existe même un type de variété appelé la variété de Mazur-Poénaru (les deux chercheurs l'ont découverte indépendamment vers 1960). Puis, comme beaucoup d'autres mathématiciens dans les années 1960, Mazur a subi l'influence d'Alexandre Grothendieck, qui envisageait une unité entre le monde fluide et continu des formes et le monde plus rigide et discret des nombres. Pour concrétiser cette vision, Grothendieck a retravaillé les fondements de la géométrie algébrique, une branche des mathématiques qui utilise des idées géométriques et topologiques pour étudier des objets de la théorie des nombres, comme les courbes qui représentent les solutions d'équations polynomiales.

### *Le charme de la géométrie algébrique*

L'un des signes de l'évolution des intérêts de Mazur est un article remarquable qu'il a écrit au milieu des années 1960 et qui décrit une analogie (qu'il attribue à David Mumford) entre les nœuds et les nombres premiers. Bien que cet article n'ait pas été publié, les idées qu'il contenait ont continué à se développer, formant la base d'un nouveau domaine appelé topologie arithmétique.

Lorsque Mazur a reçu le prix Steele de la Société mathématique américaine en 2000, il s'est souvenu du début des années 1960, lorsque Grothendieck lui a posé une question stimulante. Cette question soulevait la possibilité intrigante, selon Mazur, « que différentes topologies puissent être « unifiées » en vertu du fait qu'elles sont apparues comme des avatars différents de la même géométrie algébrique ». Attiré de cette manière par la géométrie algébrique, Mazur a entamé une colla-

boration avec Michael Artin, qu'il a qualifiée de « l'une des expériences mathématiques les plus importantes pour moi et ... un énorme plaisir ».

Le prix Steele a récompensé l'un des articles les plus influents de Mazur, « Les courbes modulaires et l'idéal d'Eisenstein », publié en 1977. Cet article représentait la première fois que toute la puissance de la révolution de Grothendieck en géométrie algébrique était mise à profit pour résoudre un problème purement lié à la théorie des nombres, à savoir un problème important qui n'avait pas été résolu depuis plus de soixante-dix ans. Bien que l'article ait été immédiatement salué comme une avancée significative, son impact réel n'est apparu qu'avec le temps, lorsque d'autres chercheurs l'ont utilisé comme tremplin pour de nouvelles avancées.

L'article poursuit la conversation millénaire des mathématiciens sur les équations diophantiennes, qui sont des équations polynomiales dont les coefficients sont des nombres entiers. Les solutions d'un système spécifique d'équations diophantiennes, celles à deux variables dont le degré le plus élevé est trois, forment des objets connus sous le nom de courbes elliptiques. Par exemple, les solutions de l'équation $y^2 - x^3 = 2$ forment une courbe dans le plan, qui ressemble un peu à la silhouette d'un poisson au corps rond suivi d'une queue infiniment longue et qui s'élargit infiniment.

Les courbes elliptiques présentent des caractéristiques étonnantes. Si l'on trace une droite reliant deux points d'une courbe elliptique, la droite atteint généralement un troisième point de la courbe, que l'on peut considérer comme la « somme » des deux premiers points. Miraculeusement, cette opération de sommation permet aux points de former un groupe. Omniprésent dans les mathématiques et les sciences, le concept de groupe organise la myriade de structures qui apparaissent lorsqu'un ensemble est doté d'une opération qui peut combiner des paires d'éléments et qui peut également être inversée. Les groupes apparaissent généralement lorsqu'on considère l'ensemble des symétries d'un objet. Par exemple, les symétries d'une molécule avec l'opération de rotation constituent un groupe.

Parmi les mathématiciens séduits par la beauté des courbes elliptiques, les très ingénieux géomètres algébristes italiens du début du XX^e^ siècle ont exploré la structure de groupe des points rationnels sur les courbes elliptiques, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont des solutions rationnelles de l'équation définissant la courbe. Ils ont observé que les groupes, plus précisément les sous-groupes de torsion, qui apparaissaient étaient d'un type très limité. Pourquoi si peu de

types apparaissent-ils ? Et lesquels exactement ?

Dans un article rédigé avec John Tate au milieu des années 1970, Mazur a affiné son intuition sur les courbes elliptiques en étudiant en détail certains exemples particuliers. Cette intuition a servi de base à l'article de Mazur primé en 1977, qui répondait complètement aux questions posées par les Italiens en décrivant la structure exacte de tous les sous-groupes de torsion possibles.

En plus de fournir une solution définitive à un problème vénérable, l'article de Mazur a ouvert de nouvelles voies de recherche grâce à ses nombreux apartés perspicaces et à ses questions ouvertes, que d'autres chercheurs ont repris pour réaliser d'autres avancées. L'article a jeté les bases d'un grand nombre des résultats parmi les plus importants de la géométrie arithmétique au cours des cinquante dernières années, et son long écho se fait encore sentir à la frontière de la recherche aujourd'hui. L'article a également joué un rôle majeur dans le regain d'intérêt pour l'étude des courbes elliptiques, qui reste un sujet central de la théorie des nombres.

### *Déformation des représentations galoisiennes*

Un tel résultat aurait pu être le couronnement d'une carrière exceptionnelle en mathématiques. Mais Mazur a poursuivi son travail en réalisant d'autres travaux fondamentaux. Il a notamment introduit ce que l'on appelle aujourd'hui les « déformations de représentations galoisiennes« . Nous ne pouvons donner qu'une image très approximative de cette notion sophistiquée.

Le travail révolutionnaire d'Évariste Galois, dont la courte vie s'est achevée dans la première partie du XIXe siècle, nous apprend qu'un certain groupe, aujourd'hui appelé groupe de Galois, est essentiel pour comprendre les solutions des équations polynomiales. Une façon d'obtenir des informations sur le groupe de Galois est d'étudier la façon dont il agit sur d'autres objets mathématiques, en particulier les espaces vectoriels sur les corps finis et sur les corps $p$-adiques.

Mazur a découvert une méthode permettant de transformer une représentation galoisienne sur un corps fini en un ensemble de déformations sur un corps $p$-adique. La raison pour laquelle il est utile de considérer des déformations individuelles est qu'elles contiennent des informations arithmétiques sur des objets géométriques concrets tels que les courbes elliptiques. La méthode de Mazur confère à l'ensemble des déformations des structures mathématiques supplémentaires qui

présentent un grand intérêt en soi et font partie d'un domaine de recherche très actif.

L'article de Mazur en 1989 qui présentait cette découverte ne résolvait pas un problème spécifique. Il a plutôt lancé une nouvelle théorie, la théorie des déformations de représentations galoisiennes, qui a dévoilé un point de vue entièrement nouveau et que d'autres chercheurs ont utilisé au cours des décennies suivantes pour réaliser de nouvelles avancées. L'une d'entre elles est l'application d'arguments de comptage sophistiqués à l'ensemble des déformations galoisiennes qui satisfont à certaines conditions.

Le premier argument spectaculaire de ce type est apparu dans la démonstration du dernier théorème de Fermat par Andrew Wiles en 1993, qui a fait date. Cette démonstration a complété un grand édifice pour lequel plusieurs idées de Mazur, y compris celles qui sont apparues dans son article de 1977 sur les courbes elliptiques, sont d'importantes pierres angulaires. La théorie des déformations de représentations galoisiennes a également été à la base des avancées du programme de Langlands, qui propose une vision unifiée des mathématiques en suggérant des relations profondes entre la géométrie, l'algèbre, la théorie des nombres et l'analyse.

### *Au-delà des mathématiques*

Aussi remarquables que soient les résultats mathématiques de Mazur, ils ne disent pas tout de l'impact qu'il a eu sur le domaine. Ses étudiants et ses collègues parlent de sa gentillesse sans faille et de la générosité avec laquelle il partage ses idées. Doué pour la communication, il est exceptionnellement perspicace dans sa capacité à présenter des explications au bon niveau pour ses auditeurs. Lorsqu'il conseille des doctorants — il en a eu près de soixante au total — il les guide et les motive sans leur imposer sa propre vision des orientations à prendre. Mazur est assurément un chef de file, mais il est aussi un inspirateur, un facilitateur, une sorte de sage-femme intellectuelle dont le radar sensible aide les autres à donner naissance à leur propre créativité.

La passion de Mazur pour les idées a eu un impact au-delà des mathématiques. Il a écrit plusieurs ouvrages d'exposition qui tentent de donner à ceux qui ne connaissent pas le domaine un sens authentique de sa profondeur et de sa beauté. Son livre *Ces nombres qui n'existent pas* (en particulier la racine carrée de moins quinze) paru en 2003,

dont le protagoniste est le concept de nombres imaginaires, est un exemple. En retraçant l'histoire de ce concept, Mazur fait appel à sa vaste connaissance de la littérature, de la philosophie et de l'histoire pour explorer la nature de l'imagination mathématique en tant que quête collective des êtres humains à travers les millénaires.

Mazur est titulaire d'un poste interdisciplinaire à l'université Harvard, la chaire Gerhard-Gade, qui lui permet d'enseigner dans différents domaines universitaires. Il a collaboré avec des collègues de la faculté de droit pour donner des cours sur la nature de la démonstration, et avec des collègues en histoire des sciences pour donner des cours sur la géométrie antique. En 2018, des étudiants et des collègues ont organisé une conférence à Harvard en l'honneur de Mazur à l'occasion de ses quatre-vingts ans. Les travaux se sont déroulés sur cinq jours et comprenaient un programme exceptionnel de conférences sur les mathématiques ainsi que des panels sur l'histoire des sciences, sur la littérature et la poésie, ainsi que sur le droit, la philosophie et la physique.

Le travail de Mazur nous a montré que ces domaines ne sont pas des entités isolées. Les idées qui les peuplent sont organiquement reliées dans le tissu de la connaissance humaine. En éclairant la chaîne et la trame des mathématiques dans ce tissu, Mazur nous a tous enrichis.

**Bibliographie**

— Mazur (Barry), *Ces nombres qui n'existent pas* (trad. C. Jeanmougin), Paris, Dunod, 2004.

# Médaille de l'abaque : Mark Braverman

> « pour ses découvertes révolutionnaires sur la théorie de la complexité de l'information, un cadre permettant d'utiliser la théorie de l'information pour raisonner sur les protocoles de communication. Ses travaux ont abouti à des théorèmes de somme directe qui donnent des bornes inférieures à la communication amortie, à des méthodes ingénieuses de compression de protocoles et à de nouveaux protocoles de communication interactifs résistants au bruit. »

Mark Braverman a participé au développement de la théorie de la complexité de l'information, l'analogue interactif de la théorie de l'information de Shannon. Cette théorie a été utilisée avec succès pour obtenir des bornes inférieures étroites sur le coût de communication des protocoles de communication interactifs pour le calcul conjoint d'une fonction lorsque l'entrée est distribuée entre deux parties ou plus.

Les premiers travaux de Braverman (avec Rao) montrent que dans tout protocole de communication interactif entre deux joueurs, l'information révélée par le protocole aux joueurs sur les entrées qui leur sont cachées est exactement égale à la complexité de communication amortie du calcul de copies indépendantes de la même fonction. Il a ainsi étendu ses travaux antérieurs (avec Barak, Chen, Rao), qui bornaient inférieurement le coût de communication amorti en termes de coût de communication et de coût d'information interne. Ces travaux ont conduit à une compréhension plus nuancée des différentes mesures du coût de l'information et, avec des avancées indépendantes ultérieures, ont établi que pour les protocoles aléatoires, les coûts de communication amortis peuvent être significativement inférieurs aux coûts non amortis. Ils ont également stimulé la conception de nouveaux protocoles permettant une meilleure compression et de nouveaux schémas de codage qui présentent une meilleure résistance aux erreurs de transmission.

Les travaux de Braverman ont également conduit à l'utilisation de la complexité de l'information dans d'autres régimes de communication interactive, notamment l'estimation statistique distribuée, les exigences en matière de mémoire dans les algorithmes de diffusion en continu et la correction d'erreurs distribuée. Ils ont également trouvé une

belle application dans un cadre notable de non-communication : les théorèmes de produit direct pour la répétition parallèle.

Outre ses travaux sur la complexité de l'information, Braverman a contribué à divers domaines à l'interface de l'informatique théorique et des mathématiques. Ces contributions comprennent la résolution de la conjecture ancienne concernant le pseudo-aléatoire et les circuits booléens de profondeur constante – l'indépendance polylog trompe $AC^0$, la compréhension de la frontière de décidabilité pour les objets géométriques tels que les ensembles de Julia quadratiques (en collaboration avec Yampolsky), et le développement d'outils algorithmiques pour les mécanismes d'incitation.

**Vulgarisation (par Allyn Jackson)**

Au cours de la dernière décennie, Mark Braverman s'est imposé comme un acteur majeur de l'informatique théorique. Il a fait preuve d'une polyvalence et d'une intrépidité peu communes qui lui ont permis non seulement de s'attaquer à des problèmes spécifiques en suspens, mais aussi de travailler sur des questions théoriques profondes. En tant que chercheur, il a fait preuve d'une maturité exceptionnelle à un jeune âge, et a produit des résultats qui ont apporté de nouvelles idées et stimulé de nouvelles recherches.

Parmi les nombreux sous-domaines de l'informatique, celui connu sous le nom d'informatique théorique est le plus proche des mathématiques. Il s'appuie sur des notions mathématiques abstraites et les développe afin d'aborder des questions inspirées par des problèmes concrets de calcul, de communication, de transmission d'information et d'autres domaines connexes. L'un des principaux objectifs de l'informatique théorique est d'établir des résultats précis et mathématiquement rigoureux sur la rapidité et l'efficacité avec lesquelles les problèmes peuvent être résolus. Un exemple emblématique de cet objectif est le célèbre problème $P \neq NP$, une question majeure non résolue à la fois en informatique théorique et en mathématiques.

À trente-huit ans, Braverman a déjà publié plus de cent articles avec plus de quatre-vingt-cinq collaborateurs. Comme son œuvre est vaste et diversifiée, nous nous concentrons ici sur trois domaines dans lesquels il a obtenu des résultats qui illustrent la profondeur et la puissance de ses travaux.

### *Calcul des ensembles de Julia*

Dès ses premiers travaux, Braverman s'est attaqué à des questions fondamentales. L'une d'entre elles portait sur l'étude de ce qui devient possible ou impossible lorsque l'on modifie la base théorique de l'informatique.

Les ordinateurs modernes sont basés sur le modèle de calcul formulé par Alan Turing dans les années 1930 et sont essentiellement des systèmes discrets : toute tâche effectuée par un ordinateur se résume à la manipulation de 0 et de 1. En revanche, les systèmes naturels tels que l'oscillation d'un pendule, la formation d'un phénomène météorologique ou la géométrie fractale d'un littoral sont continus plutôt que discrets. Les mathématiciens et les informaticiens ont donc étudié des modèles informatiques alternatifs qui sont continus plutôt que discrets. Braverman a travaillé avec un modèle qui représente les calculs non pas comme des 0 et des 1, mais plutôt comme des nombres réels (l'ensemble des nombres réels contient tous les nombres, y compris ceux qui comme $\pi$ ont un développement décimal illimité non répétitif).

Les fondements des mathématiques ont changé lorsque le modèle de calcul de Turing a révélé le concept de non-calculabilité : il existe des nombres qui peuvent être décrits de manière parfaitement claire et précise, mais qui ne peuvent pas être calculés explicitement. Quels types de phénomènes non calculables apparaissent avec les modèles de calcul continu ? C'est la question que Braverman a explorée dès son mémoire de maîtrise et dans ses travaux ultérieurs, en grande partie avec Michael Yampolsky.

Braverman s'est concentré sur un modèle de calcul continu qui repose intuitivement sur l'idée qu'un ensemble est calculable s'il peut être dessiné pixel par pixel sur un écran d'ordinateur. Parmi les objets mathématiques ainsi dessinés figurent les ensembles de Julia, des fractales découvertes par Gaston Julia au début du XX^e^ siècle et popularisées par Benoît Mandelbrot dans les années quatre-vingt. La beauté et la complexité des ensembles de Julia en ont fait le sujet non seulement d'expositions artistiques, mais aussi d'études intensives dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, la branche des mathématiques qui traite des systèmes qui évoluent dans le temps.

Bien que les ensembles de Julia puissent présenter un comportement très complexe, chacun d'entre eux est caractérisé par un seul paramètre. Braverman et Yampolsky ont identifié des valeurs de ce paramètre pour lesquelles l'ensemble de Julia associé n'est pas calculable dans le modèle

de calcul continu qu'ils ont utilisé. Ces valeurs de paramètres sont peu nombreuses et éloignées les unes des autres. Il est peu probable que vous tombiez sur l'une d'entre elles lorsque vous saisissez un paramètre dans l'un des nombreux programmes en ligne qui dessinent des ensembles de Julia. Cela indique une sorte d'instabilité des structures non calculables et pourrait expliquer pourquoi elles sont rarement rencontrées dans les problèmes du monde réel.

En 2009, Braverman et Yampolsky ont publié un ouvrage intitulé *Calculabilité des ensembles de Julia*, qui donne une vue d'ensemble de ce domaine. Braverman a apporté d'autres contributions à la calculabilité d'autres phénomènes dans les systèmes dynamiques. Par exemple, dans un article publié en 2007 avec Ilia Binder et Yampolsky, Braverman a étudié la calculabilité de l'application conforme de Riemann, une notion mathématique fondamentale dans le domaine de l'analyse complexe. En 2015, il a publié un article avec Jonathan Schneider et Cristóbal Rojas qui présente un raffinement d'un pilier de l'informatique théorique, la thèse de Church-Turing.

À partir de 2010, Braverman s'est intéressé à la complexité de l'information, dont nous parlerons plus loin. Ici aussi, le thème de l'opposition entre le discret et le continu apparaît dans son travail.

### *La complexité de l'information*

En 1948, Claude Shannon a publié un article qui proposait une théorie complète de la transmission de l'information. Il a montré que, même lorsque l'information est représentée sous forme de *bits* discrets, c'est-à-dire de chaînes de 0 et de 1, elle peut être modélisée comme une quantité continue à l'aide de la théorie des probabilités. On peut alors définir la notion d'entropie d'un message transmis, qui correspond intuitivement à la quantité d'information qu'il contient. Par exemple, supposons qu'Alice envoie à Robert un message contenant les données d'une année sur deux événements quotidiens : si le soleil s'est levé ce jour-là, et s'il a plu ce jour-là. Bien qu'elle dispose de 365 *bits* de données sur le lever du soleil, ces informations pourraient être comprimées en un seul *bit* ; leur entropie est très faible. En revanche, les 365 bits de données sur la pluie ne peuvent pas être comprimés autant ; leur entropie est plus élevée. La théorie de Shannon montre que l'entropie établit une limite naturelle à la compression d'un message sans perte d'information.

Supposons maintenant que la communication soit bidirectionnelle

au lieu d'être unidirectionnelle : Alice et Robert disposent chacun d'une information et s'envoient des *bits* dans les deux sens. Leur objectif pourrait être par exemple de comprendre en quoi leurs connaissances diffèrent. Il se peut que ce qu'Alice sait ne diffère que d'un *bit* de ce que Robert sait, mais pour établir ce fait, il faut envoyer de nombreux *bits* dans les deux sens. Dans ce cas, le coût de communication, qui correspond au nombre de *bits* échangés, est élevé, mais le coût en information, qui correspond à la quantité d'information échangée, est faible. La théorie de l'information nous éclaire-t-elle sur la manière de rendre cet échange plus efficace ?

Vers 1980, le domaine de la complexité de la communication s'est développé autour de ces questions. Des progrès considérables ont été réalisés dans la résolution de problèmes spécifiques, ce qui a eu un impact important sur les applications à des tâches telles que les algorithmes de flux et les structures de données. Toutefois, les fondements théoriques sont restés peu développés, en partie parce que la machinerie mathématique nécessaire n'existait pas. Lorsque Braverman est entré en scène vers 2010, il a relancé et élargi le domaine grâce à une série de résultats frappants qui ont fourni des fondements théoriques nouveaux et plus précis.

La question de la somme directe est fondamentale dans ce domaine. Elle se présente ainsi. Supposons que C soit le coût de l'interaction entre Alice et Robert pour effectuer une certaine tâche une fois. S'ils effectuent $k$ répétitions indépendantes de la tâche, le coût final est-il toujours égal à $k$ fois C ? Dans le cas du coût en information, Braverman a démontré que la réponse est oui. Pour le coût de communication, la réponse est généralement négative et dépend de la nature de la tâche.

Mais en 2010, Braverman, en collaboration avec Boaz Barak, Xi Chen et Anup Rao, a montré que le coût de $k$ répétitions est au moins $\sqrt{k}$ fois le coût de l'exécution de la tâche une seule fois. L'année suivante, Braverman et Rao ont démontré un résultat d'« amortissement », qui établit que dans la limite où $k$ devient très grand, le coût de communication moyen d'une répétition s'approche du coût en information. Ce résultat a eu un large impact en fournissant une ligne d'attaque naturelle pour démontrer des résultats sur l'efficacité pour des tâches de communication spécifiques. Braverman a également obtenu des résultats importants dans des régimes où la communication peut être corrompue par des erreurs de transmission ou par le sabotage.

Dans le domaine de l'informatique, le problème théorique dominant est P $\neq$ NP. Les travaux sur ce problème sont restés dans une

large mesure dans le domaine discret et n'ont pas beaucoup bénéficié des outils continus de l'analyse, qui est l'un des domaines les plus sophistiqués et les plus développés des mathématiques. Les travaux de Braverman et de ses collaborateurs sur l'efficacité de la communication pourraient offrir une lueur d'espoir que les outils continus puissent un jour avoir un impact plus important sur le problème $P \neq NP$ qu'ils n'en ont eu jusqu'à présent.

### *Théorie des mécanismes d'incitation*

Alors que l'économie algorithmique a jeté les bases d'une grande partie du commerce en ligne, la théorie des mécanismes d'incitation est devenue l'un de ses sous-domaines les plus actifs. Ici aussi, Braverman a apporté plusieurs contributions significatives.

Juste après son doctorat, Braverman a occupé un poste de chercheur au laboratoire de recherche de Microsoft en Nouvelle Angleterre au sein du groupe spécialisé dans la santé. Il a travaillé sur des outils d'apprentissage automatique permettant d'étudier les facteurs qui conduisent à la réhospitalisation des patients. Cette expérience l'a amené à comprendre que ces questions sont souvent plus économiques et du domaine de la théorie des jeux qu'informatiques. Cela a éveillé son intérêt pour l'économie algorithmique.

Un algorithme prend une entrée, exécute une procédure étape par étape et produit une sortie. L'algorithme exécute la même procédure quelle que soit la nature de l'entrée. On pourrait dire que l'entrée ne se préoccupe pas de ce qu'est l'algorithme. Mais dans de nombreuses procédures économiques, par exemple dans les ventes aux enchères, les données d'entrée sont fournies par des agents qui se soucient de ce qu'est l'algorithme et qui cherchent, par leurs données d'entrée, à influencer le résultat. C'est dans ce cadre que s'inscrit la théorie des mécanismes d'incitation. Elle vise à élaborer des protocoles qui prennent en compte les données fournies par les agents ayant un intérêt dans le résultat, et qui orientent également les agents vers des données qui aboutissent à un résultat souhaitable.

Un exemple bien connu de mécanisme d'incitation est l'enchère de Vickrey. Les enchérisseurs soumettent des offres secrètes, et la personne qui soumet l'offre la plus élevée est autorisée à acheter le bien, mais à un prix égal à la deuxième offre la plus élevée. Ce système incite les enchérisseurs à être honnêtes quant à la valeur réelle de l'objet : la sous-enchère ne permet pas de réduire le prix d'achat et peut leur faire

perdre la possibilité d'acheter l'objet. Dans le mécanisme plus général de Vickrey-Clarke-Groves (VCG), plusieurs articles sont répartis entre les enchérisseurs et chaque enchérisseur doit payer pour le « préjudice » que l'achat d'un article cause aux autres, ce qui permet d'obtenir une solution socialement optimale. Le mécanisme VCG produit d'excellents résultats théoriques, mais sa mise en œuvre pratique est entachée d'instabilités et d'autres problèmes.

Dans le monde actuel de l'informatique et de l'interconnexion à bon marché, les algorithmes sont de plus en plus manipulés par des agents stratégiques. L'un des principaux objectifs est donc de trouver des moyens de convertir les algorithmes en mécanismes, et c'est l'objet des dernières recherches de Braverman. Il s'est notamment penché sur la manière d'incorporer le mécanisme VCG dans les algorithmes basés sur de nombreuses implémentations de l'optimisation locale. Un tel algorithme contient de nombreux sous-algorithmes, chacun d'entre eux utilisant l'optimisation locale sur une petite partie du problème et progressant par étapes vers des solutions optimales au sein de cette partie. Ces solutions optimales locales sont ensuite combinées par l'algorithme principal pour résoudre le problème. L'idée de Braverman est d'intégrer le mécanisme VCG dans l'algorithme au niveau de l'optimisation locale, où les problèmes plus importants de VCG peuvent être contrôlés efficacement. L'optimisation locale étant utilisée dans de nombreux systèmes, y compris dans l'apprentissage automatique, l'approche de Braverman pourrait avoir un large impact sur les applications. Elle a déjà porté ses fruits dans le domaine théorique : en 2021, Braverman l'a utilisée pour renforcer un résultat en économie datant d'il y a plus de quarante ans.

### *Des prouesses en matière de résolution de problèmes et une intuition théorique*

Cette brève description du travail de Braverman montre qu'il est capable de progresser sur des questions difficiles qui nécessitent une concentration et un développement soutenus au fil du temps. Mais il a également travaillé sur un mode différent, en résolvant des questions ouvertes isolées et très abstraites qui faisaient appel à ses prouesses en matière de résolution de problème. La démonstration de la conjecture de Linial-Nisan qu'il a obtenue en 2010 en est un exemple. Trop technique pour être décrite ici, cette conjecture est née dans le domaine du pseudo-aléatoire et a déconcerté les chercheurs depuis qu'elle a été proposée

pour la première fois en 1990. La solution originale de Braverman a stupéfié les experts et a été d'autant plus surprenante que le problème était très éloigné des domaines dans lesquels il travaillait.

La conjonction de la capacité de Mark Braverman à résoudre des problèmes et de ses connaissances théoriques approfondies a donné lieu à des résultats d'une portée exceptionnelle. Son travail incarne l'esprit de l'informatique théorique, qui met l'accent sur l'association de la puissance des mathématiques abstraites à la lutte pour la vitesse et l'efficacité dans le monde réel. Son influence sur le domaine, déjà importante pour un chercheur aussi jeune, continuera sans aucun doute à croître.

# Prix Līlāvatī : Nikolaï Andreïev

> « pour sa contribution à l'art de l'animation mathématique et de la construction de modèles mathématiques, dans un style qui inspire les jeunes et les moins jeunes et que les mathématiciens du monde entier peuvent adapter à leurs diverses utilisations, ainsi que pour ses efforts inlassables pour vulgariser les mathématiques authentiques auprès du public par le biais de vidéos, de conférences et d'un livre primé ».

Nikolaï Nikolaïevitch Andreïev se voit décerner le prix Līlāvatī 2022 pour son art merveilleux de l'animation mathématique et de la construction de modèles mathématiques. L'animation diffère de la simulation : il s'agit d'une vidéo produite par ordinateur d'une histoire mathématique qui se déroule sous nos yeux. Les modèles diffèrent de l'impression 3D : ils sont faits de bois ou de papier, d'une simplicité ludique mais exécutés avec un savoir-faire consommé. Le style caractéristique d'Andreïev dans cet art capte l'imagination des jeunes et des moins jeunes, et offre un potentiel pour une variété d'utilisations dans la vulgarisation des mathématiques. Parallèlement, il est reconnu pour sa formidable résilience, qui lui a souvent permis de surmonter des épreuves pour continuer à susciter l'enthousiasme pour les mathématiques auprès d'un grand nombre de personnes de toutes conditions, par le biais de ressources en ligne, de conférences et d'un livre.

Rappelons que l'Europe de l'Est a une riche tradition, qui remonte au moins à l'époque de Tchebychev, d'organisation d'échelles nationales d'activités mathématiques depuis les petits enfants jusqu'aux étudiants des universités ; une partie de cette tradition a été exportée à l'étranger, comme en témoignent les « cercles mathématiques » qui fleurissent aujourd'hui dans les centres d'initiative du monde entier. C'est de cette tradition qu'est né *Kvant*, sans doute le magazine de vulgarisation mathématique et de physique théorique de la plus haute qualité que le monde ait jamais connu, avec un tirage de $2 \times 10!$ à son apogée. C'est dans le cadre de cette tradition qu'Andreïev, ou Kolya pour ses amis, est né en 1975 à Saratov et qu'il se veut un successeur de premier plan en ce XXIe siècle.

Il a commencé sa formation en tant que chercheur. Diplômé de la faculté de mécanique et de mathématiques de l'université d'État de Moscou, il a obtenu un doctorat en 2000 dans le domaine des problèmes extrémaux et de la théorie de l'approximation, des codes et des modèles. La même année, il a commencé à travailler à l'Institut mathématique Steklov, où il est resté depuis.

L'année 2002 a marqué un tournant : Andreïev a réuni une équipe composée de R. A. Koksharov (développeur principal et concepteur de sites web), M. A. Kalinitchenko (graphisme, producteur de vidéos), N. M. Paniounine (mathématiques), et a créé le projet « Études mathématiques » [13]. Ce projet est un trésor de vidéos d'animation, accessibles à tous gratuitement. Chaque vidéo donne une expérience mathématique brève mais authentique d'un point intéressant, élémentaire mais peu connu ; le style est très différent de la présentation journalistique d'un sujet à la mode. Il a également recruté A. D. Lechinski, un artiste d'une habileté stupéfiante qui concrétise des phénomènes mathématiques dans de magnifiques modèles en bois. En 2010, Andreïev a été nommé directeur du laboratoire de vulgarisation de l'Institut Steklov. Les productions de son laboratoire comprennent, outre le développement continu d'« Études » et de modèles, la collection « mécanismes de Tchebychev » [14], des gadgets mobiles qui font un usage intrigant des mathématiques, et le livre « Математическая составляющая » (que l'on peut traduire librement par « Prise mathématique sur les choses ») [15], une anthologie d'une trentaine d'éminents mathématiciens sur une diversité luxuriante de matériaux qui rappelle *Kvant*. Le livre, publié pour la première fois en 2015 par S. P. Konovalov, Paniounine, Koksharov et lui a obtenu une médaille d'or de l'écriture scientifique en 2017 ; la deuxième édition, dont le contenu a plus que doublé, a suivi en 2019.

Andreïev parcourt toute la Russie pour donner des conférences, plus de mille en vingt ans, s'adressant à d'innombrables membres du public, en particulier aux adolescents. À maintes reprises, son dévouement et sa persévérance extraordinaires lui ont permis de mener à bien sa cause : embûches administratives et financières chroniques, négociations interminables et contretemps. Chaque fois que le financement de son équipe se tarissait, il divisait son propre salaire en parts égales entre lui et les autres membres de l'équipe, afin de maintenir le travail en vie.

Malgré toutes ses réalisations, une grande partie de la carrière

13. https://etudes.ru
14. https://tcheb.ru
15. https://book.etudes.ru

d'Andreïev est encore devant lui. Nous saluons Kolya, en tant que représentant de la communauté des mathématiciens qui, au fil des siècles, se sont donnés sans compter pour faire des mathématiques avec chaque génération montante. Nous nous réjouissons à l'idée d'être stimulés par ses futurs travaux pour les décennies à venir.

# Index


$AC^0$ (complexité), 234
Acquisition comprimée, 78
Adelmann (Leonard), 12
Adiprasito (Karim), 195
Affleck (Ian), 223
Agmon (Shmuel), 82
Aizenman (Michael), 187
Algèbre, 4
Algèbre de Kac-Moody, 173
Algèbre de Lie, 4
Algèbre enveloppante, 173
Algèbre vertex, 4
Algorithme, 21
Algorithme d'espérance-maximisation, 178
Algorithme de Karmarkar, 88
Algorithme de Shor, 12
Algorithme du simplexe, 87
Ambrosio (Luigi), 150
Amortissement Landau, 67
Analyse, 15
Analyse algébrique, 172
Analyse complexe, 38
Analyse convexe, 195
Analyse fonctionnelle, 6
Analyse harmonique, 33
Analyse lisse d'algorithme, 87
Analyse microlocale, 172
Analyse numérique, 78
Anneau, 101
Anneau adélique, 158
Application lipschitzienne, 74
Apprentissage automatique, 89
Approximation diophantienne, 55
Arbre couvrant, 41
Arbre phylogénétique, 178
Arithmétique, 225
Arithmétique, 16
Arora (Sanjeev), 21
Artin (Emil), 16
Artin (Michael), 229
arXiv, 129
Association internationale de physique mathématique, 224
Association mathématique américaine, 105
Atiyah (Michael), 18
Avila (Artur), 96
Ball (John), 92
Banach (Stefan), 6
*Base inconditionnelle*, 6
Base orthonormée, 76
Beilinson (Alexander), 173
Berestycki (Henri), 83
Bernstein (Felix), 7
Bernstein (Joseph), 173
Bers (Lipman), 10
Bhargava (Manjul), 101
Bhāskara II, 93
Bijection, 175
Billard, 98
Birkar (Caucher), 139
Black (Fischer), 46
Bloch (Spencer), 225
Boltzmann (Ludwig), 67
Bolyai (János), 113
Borcherds (Richard E.), 4
Braverman (Mark), 233
Brezis (Haïm), 84
Brouwer (L. E. J.), 180
Bruit additif blanc gaussien, 90
Bruit blanc, 90
Brylinski (Jean-Luc), 173

Caffarelli (Luis), 83
Calcul des variations, 117
Calcul infinitésimal, 107
Calcul stochastique, 43
Calderón (Alberto), 74
Candès (Emmanuel), 121
Capacité d'un canal, 89
Caractère de Dirichlet, 226
Caractéristique d'un anneau, 144
Cardioïde, 26
Cardy (John), 40
Carré parfait, 15
Cartan (Élie), 126
Cascini (Paolo), 143
Catégorie dérivée, 172
Cercle, 148
Chaos quantique, 57
Chern (Shiing-Shen), 85
Chiffrement, 12
Chiffrement RSA, 12

Circuit booléen, 234
Classe de complexité, 177
Classe de Hodge, 127
Code correcteur, 21
Code d'effacement, 90
Code de Reed-Solomon, 22
Code linéaire, 89
Codimension, 117
Cohen (Albert), 78
Cohen (Henri), 158
Cohn (Henry), 208
Cohomologie cristalline, 152
Cohomologie de de Rham, 154
Cohomologie étale, 154
Cohomologie galoisienne, 19
Cohomologie motivique, 19
Coifman (Ronald), 73
Colombo (Maria), 150
Coloration de graphe, 217
Combinatoire, 6
Combinatoire géométrique, 195
Compacité, 29
Complexité dans le pire des cas, 87
Complexité de la communication, 237
Complexité des algorithmes, 87
Complexité en moyenne des algorithmes, 87
Compression de données, 165
Cône, 140
Congrès international des mathématiciens, 28
*Conjecture « clair de lune »*, 4
Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, 226
Conjecture de Duffin-Schaeffer, 202
Conjecture de géométrisation de Thurston, 28
Conjecture de Hodge, 127
Conjecture de Kepler, 208
Conjecture de Littlewood, 55
Conjecture de Milnor, 19
Conjecture de Poincaré, 28
Conjecture de Satō-Tate, 58
Conjecture de Taniyama-Shimura-Weil, 15
Conjecture de torsion, 225
Conjecture des jeux uniques, 130
*Conjectures de Kazhdan-Lusztig*, 173
Connexité simple, 29
Connexité, 11
Continuité, 180
Conway (John H.), 104
Conway (John), 4
Corps, 102
Corps de fonctions, 15
Corps de nombres $p$-adiques, 152
Corps fini, 230
Corps totalement réel, 158
Cosinus, 74
Coupe maximale, 133
Courant (Richard), 85
Courbe, 19
Courbe algébrique, 26
Courbe elliptique, 15
Courbe hyperelliptique, 103
Courbe stable, 8
*Courbe transcendante*, 115
Courbure, 29
Courbure de Gauss, 81
Courbure de Ricci, 70
Courbure négative, 30
Courbure positive, 29
Covariance, 178
Crible d'Ératosthène, 204
Crible de Sundaram, 204
Cube de Rubik, 101
Cubique à faces centrées, 208
Cybernétique, 44
Cycle, 123
Cylindre, 35

D-module, 172
Dantzig (George), 87
Daskalákis (Constantínos), 177
Daubechies (Ingrid), 77
Davenport (Harold), 102
De Philippis (Guido), 146
Débruitage, 165
Décomposition en produit de facteurs premiers, 12
Déconvolution, 168
Degré d'un polynôme, 102
Degré d'une application, 84
Deift (Percy), 26
Deligne (Pierre), 152
Densité asymptotique, 34
Densité d'un graphe, 89
Dernier théorème de Fermat, 15
Développement décimal, 235
Difféomorphisme, 99
Différentielle, 108

Dimension d'un espace vectoriel, 6
Dimension fractale, 35
Dirichlet (Johann), 55
Discriminant, 101
*Disquisitiones arithmeticae*, 101
Distance, 29
Distance de Manhattan, 168
Distribution, 108
Diviseur canonique, 139
Division euclidienne, 15
Donoho (David Leigh), 121
Drinfeld (Vladimir), 16
Droite projective, 172
Duminil-Copin (Hugo), 187
Dynamique holomorphe, 10
Dyson (Freeman), 222

Échantillonnage, 165
Einstein (Albert), 44
Eisenstein (Gotthold), 229
Ellenberg (Jordan), 158
Empilement compact, 208
Enchère de Vickrey, 238
Engquist (Björn), 117
Ensemble convexe, 81
Ensemble de Cantor, 98
Ensemble de Julia, 10
Ensemble de Mandelbrot, 10
Ensemble fini, 21
Ensemble négligeable, 56
Ensembles disjoints, 22
Entier naturel, 26
Entropie, 67
Entropie de Shannon, 236
Entropie métrique, 99
Équation aux dérivées partielles, 33
Équation aux dérivées partielles elliptique, 81
Équation aux dérivées partielles hyperbolique, 117
Équation aux dérivées partielles parabolique, 124
Équation d'Einstein, 35
Équation de Boltzmann, 67
Équation de diffusion, 47
Équation de la chaleur, 30
Équation de Laplace, 82
Équation de Monge-Ampère, 83
Équation de Schrödinger, 98
Équation de Schrödinger semi-linéaire, 35
Équation différentielle, 107
Équation différentielle linéaire, 172
Équation différentielle ordinaire, 107
Équation différentielle stochastique, 43
Équation diophantienne, 229
Équation polynomiale, 26
Équations de Hamilton-Jacobi, 117
Équations de Navier-Stokes, 72
Équilibre de Nash, 177
Erdős (Paul), 202
*Ergodicité*, 99
Eskin (Alex), 115
Espace de Banach, 6
Espace de modules, 8
Espace de Schwartz, 77
Espace de Teichmüller, 10
Espace euclidien, 73
Espace homogène, 115
Espace $L^1$, 166
Espace $L^2$, 168
Espace métrique, 130
Espace symétrique, 152
Espace tangent, 84
Espace topologique, 84
Espace vectoriel, 230
Euclide, 59
Exploration de données, 48
Exposant critique, 39
Extrémum local, 198

Faisceau, 172
Faisceau pervers, 175
Faltings (Gerd), 156
Fano (Gino), 139
Fefferman (Charles), 84
Feige (Uriel), 21
Feigenbaum (Mitchell), 96
Fermat (Pierre), 15
Feynman (Richard), 8
*Fibration de Hitchin*, 60
Fibré, 141
Fibré cotangent, 172
Figalli (Alessio), 146
Fiorni (Giovanni), 97
Fléau de la dimension, 50
Flory (Paul), 190
Flot de Ricci, 28
Fonction, 6

Fonction à oscillation moyenne bornée, 84
Fonction à sens unique, 12
Fonction algébrique, 126
Fonction booléenne, 130
Fonction complètement monotone, 209
Fonction continue nulle part dérivable, 45
Fonction convexe, 146
Fonction du second degré, 10
Fonction elliptique, 4
Fonction exponentielle, 113
Fonction L, 158
Fonction logarithmiquement convexe, 195
Fonction quasipériodique, 98
Fonction radiale, 208
Fonction transcendante, 126
Fonction zêta $p$-adique, 225
Fontaine (Jean-Marc), 155
Forme automorphe, 4
Forme modulaire, 15
Forme quadratique, 19
Forme quadratique binaire, 101
Forme volume, 114
Formule de Taylor, 109
Formule des traces de Selberg, 59
Formule sommatoire de Poisson, 208
Fourier (Joseph), 74
Fractale, 76
Friedrichs (Kurt), 85
Frontière, 10

Galois (Évariste), 230
Gauss (Carl Friedrich), 15
Genre, 112
Géodésique fermée, 113
Géométrie, 4
Géométrie algébrique, 8
Géométrie algorithmique, 12
Géométrie arithmétique, 152
Géométrie birationnelle, 139
Géométrie complexe, 123
Géométrie des nombres, 101
Géométrie différentielle, 123
Géométrie différentielle, 81
Géométrie énumérative, 26
Géométrie hyperbolique, 112
Géométrie non euclidienne, 113
Géométrie riemannienne, 148
Géométrie symplectique, 114
Géométrie tropicale, 195
Géométrisation des 3-variétés, 10
Goldwasser (Shafi), 21
Gowers (Timothy), 6
Grand prix Jacques-Herbrand, 38
Graphe, 87
*Graphe expanseur*, 90
Graphe régulier, 90
Gravité quantique, 8
Griffiths (Phillip), 123
Gross (Benedict), 104
Grossman (Alex), 76
Grothendieck (Alexandre), 18
Groupe, 4
Groupe de Galois, 16
Groupe des classes d'idéaux, 158
Groupe fini, 4
Groupe général linéaire, 158
Groupe Monstre, 4
Groupe quantique, 173
Groupe semi-simple, 158
Groupe simple, 4
Groupe sporadique, 4
Groupe symétrique, 24

Hacon (Christopher), 139
Hairer (Martin), 107
Hales (Thomas), 208
Hamilton (Richard S.), 30
Hardy (Godfrey Harold), 218
Hartman (Philip), 86
Heilbronn (Hans), 102
Hexagone, 40
Hironaka (Heisuke), 196
Hodge (W. V. D.), 154
Hofstadter (Douglas), 98
Homéomorphisme, 227
Homologie de Hochschild, 152
Homologie et cohomologie, 18
Homologie singulière, 154
Horn (Alfred), 36
Huh (June), 195
Hurwicz (Leonid), 181
Hyperplan, 7
Hypothèse de Riemann, 202

i, 93
Inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg, 85
*Inégalité de Brunn-Minkowski*, 146
Inégalité de Korn, 68
Inégalité de Young pour la convolution, 218

Inégalité isopérimétrique, 130
Inégalité isopérimétrique anisotrope, 146
Inégalités de Sobolev, 222
Infini, 93
Infographie, 117
Information quantique, 218
Informatique, 87
Informatique quantique, 12
Informatique théorique, 21
Institut de mathématiques Clay, 28
Institut de mathématiques Steklov, 28
Institut de recherches pour les sciences mathématiques, 174
Institut des hautes études scientifiques, 9
Intégrale d'Itō, 45
Intégration, 45
Intervalle, 97
Invariance d'échelle, 39
Invariant de nœuds, 8
Isométrie, 81
Isopérimétrie, 148
*Isotopie*, 173

Jitomirskaya (Svetlana), 98
John (Fritz), 84
Johnstone (Iain), 169
Jones (Vaughan), 221
Julia (Gaston), 10

K-théorie, 18
K-théorie algébrique, 19
Kac (Mark), 98
Kalai (Gil), 88
Kantorovitch (Leonid), 69
Kardar (Mehran), 108
Karmarkar (Narendra), 88
Kashiwara (Masaki), 172
Kato (Kazuya), 225
Katz (Eric), 195
Kenyon (Richard), 26
Kesten (Harry), 40
Khintchine (Alexandre), 202
Khot (Subhash), 130
Kleinberg (Jon), 48
Kneser (Martin), 160
Kohn (Joseph), 83
Kohn (Robert), 83
Kontsevitch (Maxim), 114
Koukoulópoulos (Dimítris), 202
Kra (Irwin), 10

Lacet, 29
Lafforgue (Laurent), 15
Lagrange (Joseph-Louis), 104
Landau (Lev Davidovitch), 68
Langlands (Robert P.), 15
Laumon (Gérard), 60
Lawler (Gregory), 39
Leibniz (Gottfried Wilhelm), 107
Lemme des poignées de main, 180
Lemme fondamental, 58
Lenstra (Hendrik), 158
Leopoldt (Heinrich Wolfgang), 225
Lieb (Elliott), 217
Lindenstrauss (Elon), 54
Linial (Nati), 239
Littlewood (John E.), 55
Littlewood (John Edensor), 218
Livre écossais, 6
Lobatchevski (Nikolaï Ivanovitch), 113
Loewner (Charles), 38
Logique mathématique, 178
Loi de composition, 101
Loi de conservation, 124
Loi de réciprocité quadratique, 15
Loi normale, 44
Lovász (László), 21
Lovász (László) , 92
Lund (Carsten), 21
Lyubich (Mikhail), 97

Mallat (Stéphane), 77
Mandelbrot (Benoît), 40
Marche auto-évitante, 189
Margulis (Grigori), 158
Markov (Andreï), 51
Martingale, 84
Maskin (Eric), 181
Mathématiques appliquées, 117
Mathématiques pures, 4
MathSciNet, 86
Matrice aléatoire, 25
*Matrice hermitienne*, 26
Matroïde, 195
Mawhin (Jean), 82
Maynard (James), 202
Mazur (Barry), 225
McIntosh (Alan), 74
McKernan (James), 139
McMullen (Curtis T.), 10
McMullen (Curtis Tracy), 116

Mebkhout (Zoghman), 172
Mécanisme de Vickrey-Clarke-Groves, 239
Médaille Chern, 125
Médaille Fields, 30
Mercator (Gérard), 64
Merton (Robert), 46
Mesure, 54
Mesure de Lebesgue, 146
Méthode de Newton, 10
Méthode des moindres carrés, 43
Méthode des surfaces de niveau, 117
Méthodes de points intérieurs, 88
Métrique riemannienne, 81
Meyer (Yves), 72
Michel (Philippe), 158
Milgram (Stanley), 49
Minkowski (Hermann), 102
Mirzakhani (Maryam), 112
Modèle Black-Scholes, 46
Modèle d'Ising, 187
Modèle d'Ising, 62
Modèle de glace carrée de Lieb, 217
*Modèles minimaux*, 139
Module sur un anneau, 172
Monge (Gaspard), 69
Monodromie, 152
Mori (Shigefumi), 141
Morlet (Jean), 76
Motif, 18
Motwani (Rajeev), 21
Mouhot (Clément), 69
Mouvement brownien, 38
Multiplication, 12
Multirésolution, 72
Mumford (David), 228
Myerson (Roger), 177

Nash (John F.), 179
Negroponte (Nicholas), 137
Nesin (Ali), 184
Neumann (John von), 218
Newton (Isaac), 107
Nirenberg (Louis), 81
Nisan (Noam), 239
Nœud, 8
Nombre algébrique, 73
Nombre complexe, 112
Nombre d'or, 73
Nombre de Pisot-Vijayaraghavan, 73
Nombre de Salem, 73
Nombre entier, 4
Nombre irrationnel, 55
Nombre $p$-adique, 154
Nombre premier, 15
Nombre rationnel, 16
Nombre réel, 73
Nombres premiers jumeaux, 203
Norton (Simon), 4
NP (complexité), 21
NP-difficile, 21
Nyquist (Harry), 166

Okounkov (Andreï), 24
Ondelette, 72
Ondelette de Daubechies, 78
Opérateur, 6, 72
Opérateur borné, 74
Opérateur de Fredholm, 6
Opérateur différentiel, 172
Opérateur intégral, 74
Opérateur pseudo-différentiel, 83
Optimisation, 21
Optimisation linéaire, 130
Optimisation semi-définie, 130
Option, 43
Option d'achat, 46
Optique géométrique, 117
Ordinateur quantique, 12
Orientabilité, 29
Osher (Stanley), 117
Otto (Felix), 69

P (complexité), 21
Paenza (Adrián), 136
Paley (Raymond), 76
Palis (Jacob), 92
Pandharipande (Rahul), 26
Papadimitriou (Christos), 177
Parabole, 197
Parisi (Giorgio), 108
Partie décimale, 56
Partition d'un entier, 25
Partitionnement de graphe, 91
Pavage apériodique, 73
Pavage de Penrose, 73
Percolation, 39
Perelman (Grigori), 28
Permutation, 24
Petit monde, 49
Phénomène critique, 38

Physique mathématique, 4
Pi, 55
Plongement, 81
Plus longue sous-suite strictement croissante, 26
Poénaru (Valentin), 228
Poincaré (Henri), 30
Point rationnel, 103
Poisson (Siméon-Denis), 68
Polyèdre, 87
Polynôme, 16, 101
Polytope, 170
Poonen (Bjorn), 104
PPAD (complexité), 177
Preuve vérifiable de manière probabiliste, 21
Principe du maximum, 83
Principe local-global, 158
Prix Blumenthal, 105
Prix Bôcher, 33
Prix Cole, 105
Prix Conant, 33
Prix de la Société mathématique européenne, 7
Prix Fermat, 38
Prix Fröhlich, 110
Prix Fulkerson, 89
Prix Gauss, 43
Prix Gödel, 89
Prix Gödel, 21
Prix Infosys, 105
Prix Līlāvatī, 92
Prix Loève, 38
Prix Michael-Brin, 99
Prix Philip-Leverhulme, 110
Prix Pólya, 38
Prix Rollo-Davidson, 38
Prix Salem, 33
Prix SASTRA Ramanujan, 105
Prix Satter, 116
Prix Steele, 127
Prix Whitehead, 110
Probabilité, 21
Problème de l'aiguille de Kakeya, 34
Problème de l'obstacle, 146
Problème de satisfaction de contraintes, 133
Problème P ≠ NP, 131
Problèmes de Hilbert, 160
Problèmes du prix du millénaire, 28
Problème aux limites, 83
Processus CIR, 46
Processus de Wiener, 44
Processus stochastique, 45
Produit de convolution, 74
Produit infini, 4
Produit tensoriel, 173
Programmation linéaire, 69
Programme de Langlands, 15
Pseudo-aléatoire, 130

Quasi-cristal, 72

Racine carrée, 126
Racine d'un polynôme, 102
Raghavendra (Prasad), 133
Raghunathan (M. S.), 92
Ramanujan (Srinivasa), 104
Ratner (Marina), 115
Redondance, 22
Regev (Oded), 133
Renormalisation, 96
Représentation de groupe, 16
Représentation galoisienne, 15
Réseau (géométrie), 102
Réseau de Leech, 208
Reste, 15
Riemann (Bernhard), 112
Rigidité, 115
Rivest (Ronald), 12
Ross (Stephen A.), 46
Rota (Gian-Carlo), 195
Rotation plane, 34

Safra (Shmuel), 21
Sarnak (Peter), 90
Satō (Mikio), 172
Saunders (Michael), 169
Schapira (Pierre), 172
Schoenflies (Arthur Moritz), 226
Scholes (Myron), 46
Scholze (Peter), 152
Schramm (Oded), 39
Schröder (Ernst), 7
Science des données, 165
Séminaire Nicolas Bourbaki, 77
Série de Fourier, 74
Serra (Joaquim), 150
Shamir (Adi), 12
Shannon (Claude), 166
Shor (Peter), 12

Simon (Barry), 98
Singh (Simon), 92
Sinus, 74
Six degrés de séparation, 49
Smirnov (Stanislav), 40
Sobolev (Sergueï), 218
Société mathématique américaine, 33
Société mathématique de Londres, 110
Solénoïde, 153
Solution faible, 82
Sous-additivité, 218
Sous-espace vectoriel, 6
Sousline (Andreï), 19
Spectre d'un opérateur linéaire, 98
Spencer (Donald), 125
Sphère, 29
Sphère, 18
Sphère cornue d'Alexander, 227
Spielman (Daniel), 88
Staffilani (Gigliola), 36
Statistique, 78
Strogatz (Steve), 49
Structure presque complexe, 84
Sturm (Karl-Theodor), 70
Sudan (Madhu), 21
Support de fonction, 77
Surface, 18
Surface de Riemann, 112
Surface minimale, 150
Swinnerton-Dyer (Peter), 226
Symétrie, 35
Symétrie axiale, 175
Symétrie de rotation, 175
Symétrie de translation, 175
Système d'équations linéaires, 91
Système d'Euler, 226
Système différentiel, 126
Système dynamique, 54
*Système hyperbolique*, 11
Système intégrable, 124
Szegedy (Mário), 21
Szemerédi (Endre), 7

Takagi (Teiji), 16
Tao (Terence), 33
Tate (John), 155
Taylor (Richard), 58
Teng (Shang-Hua), 88
Théorème central limite, 130
Théorème d'échantillonnage, 166
Théorème d'équidistribution, 158
Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers, 161
Théorème de Faltings, 103
Théorème de Green-Tao, 34
Théorème de l'application conforme, 236
Théorème de Szemerédi, 7
Théorème des nombres premiers, 113
Théorème des quatre carrés de Lagrange, 104
Théorème du point fixe de Brouwer, 177
Théorie additive des nombres, 33
Théorie algébrique des nombres, 101
Théorie analytique des nombres, 158
Théorie conforme des champs, 38
Théorie d'Iwasawa, 225
*Théorie de Brill-Noether*, 123
Théorie de Hodge, 123
Théorie de l'information, 233
Théorie de l'information, 68
Théorie de l'intersection, 8, 195
Théorie de la calculabilité, 179
Théorie de la complexité, 91
Théorie de la mesure, 147
Théorie de la percolation, 187
Théorie de Nevanlinna, 123
Théorie des catégories, 172
Théorie des cordes, 4
Théorie des cribles, 202
Théorie des enchères, 177
Théorie des graphes, 90
Théorie des groupes, 58
Théorie des jeux, 178
Théorie des mécanismes d'incitation, 177
Théorie des nœuds, 8
Théorie des nombres, 15
Théorie des nombres, 43
Théorie des probabilités, 24
Théorie des représentations, 24
Théorie des réseaux, 48
Théorie des singularités, 195
Théorie des systèmes dynamiques, 96
Théorie des systèmes dynamiques, 10
Théorie du chaos, 10
Théorie du transport, 69
Théorie ergodique, 54
Théorie géométrique de la mesure, 73
Théorie quantique des champs, 8
Thèse de Church-Turing, 236
Thurston (William), 30

Topologie, 8
Topologie algébrique, 152
Topologie arithmétique, 228
Tore, 29
Torsion, 152
Tour de corps, 225
Tracy (Craig), 26
Traitement d'images, 74
Traitement de données, 168
Traitement du signal, 74
Transformation conforme, 41
Transformation de Fourier, 76
Transformation de Fourier rapide, 77
Transition de phase, 187
Tresse, 217
Trèves (François), 83
Triplet pythagoricien, 140
Turing (Alan), 235

Union mathématique internationale, 44

Valeur absolue, 102
Valeur propre, 25
Variation totale d'une fonction, 117
Variété, 29
Variété algébrique, 114
Variété algébrique, 18
Variété complexe, 19
Variété de Calabi-Yau, 141
Variété de dimension 3, 10
Variété de Poisson, 8
Variété de Shimura, 163
Variété différentielle, 84
Variété kählérienne, 123
Variété projective, 139
Vassiliev (Viktor), 8
Vecteur, 50
Venkatesh (Akshay), 158
Verre de spin, 170
Viazovska (Maryna), 208
Villani (Cédric), 67
Vision par ordinateur, 117
Voïevodski (Vladimir), 18

Watts (Duncan), 49
Weil (André), 15
Welsh (Dominic), 195
Werner (Wendelin), 38
Weyl (Hermann), 81
Widom (Harold), 26
Wiener (Norbert), 44
Wigner (Eugène), 75
Wiles (Andrew), 15
Wilkinson (Amie), 99
Wilson (Kenneth G.), 39
Winterberger (Jean-Pierre), 155
Witten (Edward), 8
Wulff (Youri V.), 146

Xu (Chenyang), 139

Yngvason (Jakob), 223

Zéro, 93
Zhang (Yitang), 202
Zygmund (Antoni), 74

Ce recueil regroupe les traductions en français des textes de vulgarisation disponibles sur le site de l'Union mathématique internationale relatifs aux lauréats de la médaille Fields, du prix Gauss, de la médaille Chern, du prix Nevanlinna et du prix Līlāvatī pour les années 1998 à 2022.

**Les lauréats des prix de l'Union mathématique internationale (1998-2022)**