

Verhulst et l'équation logistique en dynamique des populations *

Nicolas Bacaër †

En 1838, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst publia un article dans lequel il introduisit (avec des notations différentes) l'équation logistique désormais bien connue pour la croissance d'une population

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{K} \quad (1)$$

[20]. Il ajusta les paramètres de cette équation aux données sur la population de plusieurs pays, y compris la Belgique. L'article ne dit pas quelles valeurs de r et K furent obtenues. Mais il semblerait d'après le tableau exposé que Verhulst basa ses calculs pour la Belgique sur les hypothèses suivantes, obtenues à partir de données réelles :

$$P(1815) = 3\,494\,985, \quad P(1824) = 3\,816\,249, \quad P(1833) = 4\,142\,257.$$

Avec ces trois points (notons que le modèle a trois paramètres : r , K et une constante d'intégration), on trouve facilement $K = 8,43$ millions pour l'asymptote de la population. En effet, si P_0 , P_1 et P_2 sont les populations aux temps t_0 , $t_1 = t_0 + T$ et $t_2 = t_0 + 2T$, alors

$$K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}.$$

En 1845, Verhulst publia un autre article sur le même sujet. Il introduisit le terme « logistique » et expliqua plus en détail comment estimer les paramètres. Il utilisa cette fois-là des hypothèses légèrement différentes, après une étude plus attentive des données :

$$P(1815) = 3\,627\,253, \quad P(1830) = 4\,247\,113, \quad P(1845) = 4\,800\,861. \quad (2)$$

Il obtint $K = 6,58$ millions [21], un résultat bien inférieur à l'estimation précédente. Verhulst retourna à ce sujet dans une courte note l'année suivante [22] et enfin dans un article plus long publié en 1847. Dans ces deux documents, il

* *European Communications in Mathematical and Theoretical Biology* 10 (2008) 24-26.

† Institut de Recherche pour le Développement, 32 avenue Henri Varagnat, 93143 Bondy, courriel: nicolas.bacaer@ird.fr

suggéra qu'il y avait une erreur dans la « dérivation » de l'équation logistique et utilisa à la place (encore avec des notations différentes) un modèle de la forme

$$\frac{dP}{dt} = rP \frac{K - P}{P} = r(K - P) \quad (3)$$

[23]. Avec les mêmes données (2), il obtint $K = 9,44$ millions, un résultat encore assez différent des deux précédents résultats. Pour ce deuxième modèle,

$$K = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{2P_1 - P_0 - P_2}.$$

L'équation logistique (1) fut réintroduite plusieurs décennies plus tard par différentes personnes sans connaître le travail de Verhulst [8]. Elle fut utilisée pour la croissance individuelle des animaux, des plantes, des hommes et des organes du corps [18], pour la croissance de populations de micro-organismes [10], ou comme Verhulst pour la croissance de populations humaines telles que la population des États-Unis [12]. Le travail de Verhulst fut finalement remarqué [13, p. 249] et le terme « logistique » devint communément utilisé. Les débats concernant la signification de l'équation logistique durèrent de nombreuses années (pour un exposé détaillé, voir [7, p. 64-97]). La conclusion fut probablement que ce n'était pas une loi fondamentale et qu'elle peut être utilisée pour des projections à court terme, mais pas pour des projections à long terme. En 1976 néanmoins, le volume 13 du « *Dictionary of Scientific Biography* » offrit une notice sur Verhulst avec le résumé suivant de son travail sur la population [14] :

« Verhulst montra en 1846 que les obstacles croissent proportionnellement au rapport de l'excès de population sur la population totale. Il fut ainsi conduit à donner le chiffre 9 400 000 comme limite supérieure pour la population de la Belgique (qui d'ailleurs était de 9 581 000 en 1967). Les recherches de Verhulst sur la loi de croissance de la population en font un précurseur pour les spécialistes modernes du sujet. »

Notons que ce paragraphe se réfère au modèle (3) et non au modèle (1), même si l'on se souvient de nos jours de Verhulst uniquement à cause du modèle (1). De plus, étant donnée la variabilité des résultats de Verhulst pour la population maximale K , il semblerait que la comparaison d'un seul résultat avec la population actuelle de la Belgique n'ait pas vraiment de sens. La citation précédente a aussi été une source de confusion pour les références ultérieures à Verhulst. Depuis 1996 par exemple, l'un des sites les plus populaires sur l'histoire des mathématiques [11] cite [14] et raconte l'histoire d'une manière légèrement modifiée (et mise à jour) :

« L'équation différentielle non linéaire qui décrit la croissance d'une population biologique, qu'il déduisit et étudia, porte désormais son nom. Avec sa théorie, Verhulst prédit que la limite supérieure de la population belge serait 9 400 000. La population en 1994 était 10 118 000. Cette prédiction semble assez bonne, étant donné l'effet de l'immigration. »

Notons dans cette citation que « sa théorie » réfère à l'équation logistique, que Verhulst lui-même finit par penser qu'elle n'était pas correcte. De plus, le résultat numérique du modèle (3) est attribué au modèle (1), ce qui donne l'impression d'une réhabilitation de l'équation logistique pour les projections à long terme de la population. Dans un livre récent [5, p. 5], on trouve une variante proche avec une nouvelle mise à jour :

« Avec sa théorie, Verhulst prédit que la capacité limite de la population en Belgique serait 9,4 millions. La population totale en Belgique en janvier 2000 est de 10,24 millions d'habitants, une différence de seulement 0,84 million, principalement due à l'immigration. »

Le livre [6, p. 10] raconte une histoire semblable. Comme Ronald Fisher l'a écrit au sujet des travaux de Mendel [3, p. 6] :

« L'Histoire des Sciences a beaucoup souffert de l'utilisation par les professeurs de matériaux de seconde main, et de l'oubli conséquent des circonstances et de l'atmosphère intellectuel dans lequel les grandes découvertes du passé furent faites. Une étude de première main est toujours instructive, et souvent . . . pleine de surprises. »

Grâce à la Toile, les études de première main sont maintenant grandement simplifiées. La bibliothèque de l'université de Göttingen en Allemagne a numérisé les journaux avec les articles de Verhulst de 1845 et 1847 : on peut les télécharger à partir du site de la bibliothèque. Quant à l'article de 1838, on trouve une traduction en anglais dans [19].

Pour terminer, voici une courte biographie de Verhulst [16, 17]. Pour des discussions plus récentes, voir par exemple [9, 4, 1, 2] :

- 1804 : naissance à Bruxelles.
- 1822-1825 : études à l'Université de Gand, thèse en mathématiques.
- 1829 : publication de sa traduction du livre de John Herschel « *Traité de la lumière* ».
- 1830 : après la révolution qui conduit à l'indépendance de la Belgique, s'intéresse à la politique, l'histoire et « l'arithmétique politique ».
- 1834 : commence à enseigner les mathématiques à l'École Royale Militaire.
- 1835 : publication par son ancien professeur Quetelet d'un « *Essai de physique sociale* », point de départ des études de Verhulst sur la croissance des populations.
- 1835-1840 : professeur à l'Université Libre de Bruxelles.
- 1841 : publication de son traité mathématique sur les fonctions elliptiques. Élection à l'Académie royale de Belgique.
- 1848 : président de l'Académie.
- 1849 : mort à Bruxelles (probablement de la tuberculose).

Références

- [1] Ausloos, M., Dirickx, M. (éd.), 2006. *The Logistic Map and the Route to Chaos : From the Beginnings to Modern Applications*. Springer-Verlag, Ber-

lin.

- [2] Bacaër, N., 2008. Histoires de mathématiques et de populations. Éditions Cassini, Paris.
- [3] Bennett, J.H., 1965. *Experiments in Plant Hybridisation*. Oliver & Boyd, Édimbourg.
- [4] Delmas, B., 2004. Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population. *Mathématiques et Sciences Humaines* 167, 51-81. <http://www.ehess.fr/revue-msh/pdf/N167R893.pdf>
- [5] Iannelli, M., Martcheva, M., Milner, F. A., 2005. *Gender-structured Population Modeling : Mathematical Methods, Numerics, and Simulations*. SIAM, Philadelphie.
- [6] Istas, J., 2005. *Mathematical Modeling for the Life Sciences*. Springer, New York.
- [7] Kingsland, S.E., 1985. *Modeling Nature*. Presses de l'Université de Chicago.
- [8] Lloyd, P.J., 1967. *American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve*. *Population Studies* 21, 99-108.
- [9] Mawhin, J., 2002. Les héritiers de Pierre-François Verhulst : une population dynamique. *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences*, 349-378.
- [10] McKendrick, A.G., Kesava Pai, M., 1911. *The rate of multiplication of micro-organisms : A mathematical study*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 31, 649-655.
- [11] O'Connor, J.J., Robertson, E.F., 1996. Pierre François Verhulst. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Verhulst.html>
- [12] Pearl, R., Reed, L.J., 1920. *On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation*. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6, no.6, 275-288.
- [13] Pearl, R., 1922. *The Biology of Death*. Lippincott, Philadelphie.
- [14] Pelseneer, J., 1976. Verhulst (Pierre-François). In : Gillispie, C.C. (Ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol.13. C. Scribner's sons, New York, p.616.
- [15] Quetelet, A., 1835. *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale*. Bachelier, Paris. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k81570d>
- [16] Quetelet, A., 1850. Pierre-François Verhulst. *Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* 16, 97-124. Traduction en anglais dans : Miner, J.R., 1933. *Pierre-François Verhulst, the discoverer of the logistic curve*. *Human Biology* 5, 673-689.
- [17] Quetelet, A., 1867. *Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIXème siècle*. C. Mucquardt, Bruxelles. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99395b>

- [18] Robertson, T.B., 1908. *On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance*. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen 25, 581-614.
- [19] Smith, D.P., Keyfitz, N., 1977. *Mathematical Demography : Selected Papers*. Springer, New York.
- [20] Verhulst, P.-F., 1838. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance Mathématique et Physique, vol.X, 113-121.
- [21] Verhulst, P.-F., 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, vol.XVIII, 1-45. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=77222
- [22] Verhulst, P.-F., 1846. Note sur la loi d'accroissement de la population. Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Belgique, vol.XIII, 1ère partie, 226-227.
- [23] Verhulst, P.-F., 1847. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, vol.XX, 1-32. http://gdz.sub.unigoettingen.de/no_cache/dms/load/img/?IDDOC=74013