Analyse numérique des problèmes de valeur propre max-plus généralisés *

Nicolas Bacaër

Résumé

On s'intéresse au problème d'optimisation déterministe en temps discret à horizon infini sur un espace métrique compact avec un critère de coût moyen qui fait intervenir deux fonctions K (le coût) et T (le temps). On rassemble tout d'abord les différentes caractérisations de la valeur λ comme problème de valeur propre max-plus et comme problème de programmation linéaire. Puis on démontre une borne sur l'erreur faite sur λ lorsque l'espace est discrétisé.

Mots clés : Optimisation en temps discret ; Coût moyen ; Programmation linéaire ; Analyse numérique

1 Introduction

On s'intéresse au problème d'optimisation déterministe en temps discret à horizon infini avec un critère de coût moyen

$$\lambda = \max_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})},$$

où X est un espace métrique compact, K et T sont des fonctions continues avec $T > 0$. L'ensemble X est l'espace d'états, x_n l'état du système au temps n, $K(x_n, x_{n+1})$ le coût et $T(x_n, x_{n+1})$ le temps associé à la transition de l'état x_n vers l'état x_{n+1}. Le problème est motivé par des exemples qui viennent de la physique (modèles de Frenkel et Kontorova pour les transitions de phase [8]), de l'ingénierie (ordonnancement des machines [10]) et de l'économie ([11], agriculture [3], voyageur de commerce).

L'objectif ici est double. Tout d'abord, on rassemble les différentes caractérisations de λ comme problème de valeur propre max-plus généralisé (aussi appelé équation d'optimalité de Bellman)

$$\max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + u(y)\} = u(x)$$

* *Journal of Computational and Applied Mathematics* 163 (2004) 79-89.

et comme problème de programmation linéaire. Ces caractérisations semblent n'avoir été démontrées que dans le cas particulier où $T = 1$ [7, 8, 13] ou d'un ensemble X qui est fini [11, 14, 10, 4]. Deuxièmement, on démontre une borne pour l'erreur commise sur λ lorsque l'espace X est discrétisé, ce qui généralise un travail récent [2] qui supposait que $T = 1$.

Mentionnons quelques domaines de recherche liés à notre étude. Des problèmes de programmation linéaire en dimension infinie qui ressemblent beaucoup à l'équation (4) ci-dessous apparaissent dans le problème de transport de masse de Monge et Kantorovich et dans le problème de transbordement de Kantorovich et Rubinstein étudié dans [17]. Il y a naturellement aussi des analogues en temps continu de notre problème. Un analogue en temps continu de la formule (4) intervient par exemple dans l'étude des systèmes lagrangiens [12]. La propriété (7) est aussi un ingrédient de base de la théorie d'Aubry et Mather [5, 6]. Des problèmes de coût moyen se trouvent aussi dans le cadre de la théorie du contrôle stochastique [15, 16]. Ces études supposent que $T = 1$ et ne couvrent donc pas notre travail. Notons qu'ici, il ne sera pas nécessaire d'utiliser les méthodes sophistiquées de la programmation linéaire en dimension infinie présentées par exemple dans [1] et basées sur les topologies faibles, le théorème d'Alaoglu et le théorème de séparation par un hyperplan pour démontrer la « dualité forte ».

2 Notations et résultats

Rappelons quelques définitions. Si X est une espace métrique compact, alors $C^0(X)$ est l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles. C'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme du suprémum. L'espace dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $C^0(X)$ (ou mesures sur X), sera noté $\mathcal{M}(X)$. Si $\rho \in \mathcal{M}(X)$, alors $\rho \geq 0$ signifie que $\langle u, \rho \rangle \geq 0$ pour tout $u \in C^0(X)$ tel que $u \geq 0$. Les crochets désignent le produit de dualité.

L'énoncé du premier théorème nécessite quelques notations spéciales. Si $u \in C^0(X)$, définissons $Q_1 u$ et $Q_2 u \in C^0(X^2)$ par $(Q_1 u)(x, y) = u(x)$ et $(Q_2 u)(x, y) = u(y)$ pour tout $(x, y) \in X^2$. Si $\rho \in \mathcal{M}(X^2)$, définissons $P_1 \rho$ et $P_2 \rho \in \mathcal{M}(X)$ par $\langle u, P_1 \rho \rangle = \langle Q_1 u, \rho \rangle$ et $\langle u, P_2 \rho \rangle = \langle Q_2 u, \rho \rangle$ pour tout $u \in C^0(X)$. Rappelons aussi que si E est un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$, alors la notation $x \in \mathrm{argmax}_{y \in E} f(y)$ signifie que $x \in E$ et $f(x) = \max\{f(y);\ y \in E\}$.

Théorème 1 *Soit X un espace métrique compact, $K \in C^0(X^2)$ et $T \in C^0(X^2)$. Supposons que $T(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in C^0(X)$ avec*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y \in X} \{K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y)\} = u(x)\,. \tag{1}$$

De plus,

$$\lambda = \max_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \tag{2}$$

$$= \min\{\mu;\ (\mu, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X),\ K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\} \tag{3}$$

$$= \max\{\langle K, \rho\rangle;\ \rho \in \mathcal{M}(X^2),\ \rho \geq 0, \langle T, \rho\rangle = 1,\ P_1\rho = P_2\rho\} \tag{4}$$

et (λ, u) *qui vérifient (1) atteignent le minimum dans (3). Si* $x_0 \in X$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \in \operatorname*{argmax}_{y\in X}\{K(x_n, y) - \lambda T(x_n, y) + u(y)\} \tag{5}$$

alors

– (x_n) *atteint le maximum dans (2) ;*

– *la mesure* $\rho^* \in \mathcal{M}(X^2)$ *définie par*

$$\forall\phi \in C^0(X^2), \quad \langle\phi, \rho^*\rangle = \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \phi(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} \tag{6}$$

atteint le maximum dans (4).

– *pour tout* $0 \leq i < j$, *pour tout* $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ *tel que* $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$,

$$\sum_{n=i}^{j-1}[K(y_n, y_{n+1}) - \lambda T(y_n, y_{n+1})] \leq \sum_{n=i}^{j-1}[K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1})]\,. \tag{7}$$

On dit que l'unique nombre réel λ défini dans le théorème 1 est la valeur propre de (K, T). On dit d'une fonction u qui vérifie (1) que c'est une fonction propre de (K, T). La proposition suivante concerne le problème transposé.

Proposition 1 *Mêmes hypothèses que dans le théorème 1. Pour tout* $x, y \in X$, *posons* $K'(x, y) = K(y, x)$ *et* $T'(x, y) = T(y, x)$. *Soit* λ *la valeur propre de* (K, T) *et* λ' *la valeur propre de* (K', T'). *Alors* $\lambda = \lambda'$.

Le théorème suivant aborde la question de l'analyse numérique de (1). Rappelons qu'une fois discrétisé, il y a des algorithmes bien connus pour résoudre le problème fini qui en résulte, par exemple l'algorithme d'itération des politiques [9].

Théorème 2 *Soit* (X, d) *un espace métrique compact. Soit* $K : X^2 \to \mathbb{R}$ *et* $T : X^2 \to \mathbb{R}$ *des fonctions lipschitziennes avec des constantes de Lipschitz* C_K *et* C_T : $\forall x, x', y, y' \in X$,

$$|K(x, y) - K(x', y')| \leq C_K \max\{d(x, x'); d(y, y')\}$$

$$|T(x, y) - T(x', y')| \leq C_T \max\{d(x, x'); d(y, y')\}\,.$$

Supposons que $T(x, y) > 0$ *pour tout* $x, y \in X$. *Soit* λ *la valeur propre de* (K, T). *Soit* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de sous-ensembles finis de* X *tels que*

$$h_p = \sup_{x\in X} \min_{y\in X_p} d(x, y) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème 1, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\lambda_p \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u_p : X_p \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in X_p,\ \max_{y \in X_p} \{K(x,y) - \lambda_p\, T(x,y) + u_p(y)\} = u_p(x)\,.$$

Soit $\delta_T = \min\{T(x,y);\ (x,y) \in X^2\}$ et $\|K\| = \max\{|K(x,y)|;\ (x,y) \in X^2\}$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_p \leq \lambda \leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|\, C_T}{(\delta_T)^2} \right) h_p$$

et $\lambda_p \to \lambda$ quand $p \to +\infty$.

Certains résultats utiles pour démontrer la première partie du théorème 1 sont rappelés dans la section 3. Ces résultats se trouvent par exemple dans [2]. La preuve de la première partie du théorème 1 se trouve dans la section 4. On démontre la formule (2) et l'optimalité de (x_n) dans la section 5. On démontre les formules (3), (4) et l'optimalité de (λ, u) et de ρ^* dans la section 6 en généralisant les démonstrations de [10]. On démontre la propriété (7) dans la section 7, la proposition 1 dans la section 8, le théorème 2 dans la section 9. Enfin, on propose dans la section 10 une démonstration alternative de l'existence de (λ, u) qui vérifie (1). Elle repose sur un passage à la limite à partir d'un problème de coût actualisé. Un avantage de cette approche par rapport à celle de la section 4 est qu'elle n'utilise pas la proposition 4 ci-dessous (qui repose sur le théorème de point fixe de Schauder). Elle n'utilise que le théorème de point fixe de Banach.

3 Résultats connus

Proposition 2 *Soit X un espace métrique compact et $K \in C^0(X)$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u \in C^0(X)$ qui vérifie*

$$\forall x \in X,\ \max_{y \in X} \{K(x,y) + u(y)\} = \lambda + u(x)\,.$$

De plus,

$$\lambda = \max_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})\,. \tag{8}$$

Proposition 3 *Soit X un espace métrique compact. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $K_\alpha \in C^0(X)$. Supposons que pour tout $x, y \in X$, la fonction $\alpha \mapsto K_\alpha(x,y)$ soit convexe. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit λ_α l'unique nombre réel associé à K_α par la proposition 2. Alors la fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe.*

4 Démonstration de la première partie du théorème 1

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x, y \in X$, posons $K_\lambda(x,y) = K(x,y) - \lambda T(x,y)$. Vue la proposition 2, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\Lambda(\lambda) \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe

$u_\lambda \in C^0(X)$ qui vérifie

$$\forall x \in X,\ \max_{y\in X}\{K_\lambda(x,y) + u_\lambda(y)\} = \Lambda(\lambda) + u_\lambda(x).$$

Avec la formule (8), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda(\lambda) = \max_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} K_\lambda(x_n, x_{n+1})\,. \tag{9}$$

Mais $T \geq 0$ implique que l'application $\lambda \mapsto K_\lambda = K - \lambda T$ de $\mathbb{R}$ dans $C^0(X)$ est décroissante. La formule (9) montre alors que l'application $\lambda \mapsto \Lambda(\lambda)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi décroissante. Puisque K_λ est une fonction linéaire (donc convexe) de λ, la proposition 3 montre que Λ est une fonction convexe, donc continue.

Prenons pour la suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ dans (9) la suite stationnaire égale à x_0. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Lambda(\lambda) \geq K_\lambda(x_0, x_0) = K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0).$$

Mais $T(x_0, x_0) > 0$, donc $K(x_0, x_0) - \lambda T(x_0, x_0) \to +\infty$ quand $\lambda \to -\infty$, et $\Lambda(\lambda) \to +\infty$ quand $\lambda \to -\infty$.

Puisque X est compact et puisque la fonction T est continue et strictement positive, on a $\delta_T = \min\{T(x,y);\,(x,y) \in X^2\} > 0$. Posons $\|K\| = \max\{|K(x,y)|;\,(x,y) \in X^2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$ et $(x,y) \in X^2$, on a $K_\lambda(x,y) = K(x,y) - \lambda T(x,y) \leq \|K\| - \lambda\,\delta_T \leq -\varepsilon$. La formule (9) implique que pour tout $\lambda \geq (\|K\| + \varepsilon)/\delta_T$, on a $\Lambda(\lambda) \leq -\varepsilon$.

Comme la fonction continue Λ prend des valeurs > 0 et < 0, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(\lambda^*) = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned}\forall x \in X,\quad u_{\lambda^*}(x) =& \Lambda(\lambda^*) + u_{\lambda^*}(x) = \max_{y\in X}\{K_{\lambda^*}(x,y) + u_{\lambda^*}(y)\}\\ =& \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda^* T(x,y) + u_{\lambda^*}(y)\}.\end{aligned}$$

La partie existence du théorème 1 est démontrée. L'unicité résulte de la formule (2), qui est démontrée dans la prochaine section.

5 Démonstration de la formule (2)

- Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. Alors (1) implique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u(x_n) \geq K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

Additionnons les N premières inégalités. On obtient

$$u(x_0) \geq \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) + u(x_N).$$

Mais $T > 0$, donc

$$\lambda \geq \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1}) + u(x_N) - u(x_0)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Comme $T \geq \delta_T > 0$, on a $\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1}) \geq N\delta_T \to +\infty$ lorsque $N \to +\infty$. Comme u est borné, on obtient

$$\lambda \geq \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Mais $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ était arbitraire. Donc

$$\lambda \geq \sup_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

• Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui vérifie (5). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(x_n) = K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}).$$

On additionne ces équations et on obtient comme avant que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda + \frac{u(x_0) - u(x_N)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}.$$

Ainsi,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda.$$

Avec (10), cela démontre la formule (2) et le fait que (x_n) atteigne le maximum.

6 Démonstration des formules (3) et (4)

Posons

$$E = \{\rho \in \mathcal{M}(X^2);\ \rho \geq 0,\ \langle T, \rho\rangle = 1,\ P_1\rho = P_2\rho\}$$

et

$$\tilde{E} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times C^0(X);\ K - \mu T + Q_2 v \leq Q_1 v\}.$$

Pour tout $\rho \in E$ et $(\mu, v) \in \tilde{E}$,

$$\langle K, \rho\rangle \leq \langle \mu T + Q_1 v - Q_2 v, \rho\rangle = \mu\langle T, \rho\rangle + \langle v, P_1\rho - P_2\rho\rangle = \mu\,,$$

donc

$$\sup\{\langle K, \rho\rangle;\ \rho \in E\} \leq \inf\{\mu; (\mu, v) \in \tilde{E}\}.$$

Avec la première partie du théorème 1, on sait qu'il existe $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C^0(X)$ qui vérifie (1). On remarque que $K(x, y) - \lambda T(x, y) + u(y) \leq u(x)$ pour tout $x, y \in X$, donc $(\lambda, u) \in \tilde{E}$ et

$$\inf\{\mu;\ (\mu, v) \in \tilde{E}\} \leq \lambda.$$

Considérons ρ^* défini par (6). On voit facilement que ρ^* appartient à $\mathcal{M}(X^2)$, que $\rho^* \geq 0$ et que $\langle T, \rho^* \rangle = 1$. Pour tout $u \in C^0(X)$,

$$\langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle Q_1 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \to +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}\,,$$

$$\langle u, P_2\rho^* \rangle = \langle Q_2 u, \rho^* \rangle = \limsup_{N \to +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} u(x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})}\,,$$

donc $\langle u, P_1\rho^* \rangle = \langle u, P_2\rho^* \rangle$ (puisque u est borné), et $P_1\rho^* = P_2\rho^*$. Ainsi $\rho^* \in E$. De plus,

$$\langle K, \rho^* \rangle = \limsup_{N \to +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n, x_{n+1})} = \lambda$$

puisque (x_n) atteint le maximum dans (2). Donc

$$\sup\{\langle K, \rho \rangle;\ \rho \in E\} \geq \lambda\,.$$

En conclusion,

$$\lambda = \max\{\langle K, \rho \rangle;\ \rho \in E\} = \min\{\mu;\ (\mu, v) \in \tilde{E}\},$$

ρ^* atteint le maximum et (λ, u) atteint le minimum.

7 Démonstration de (7)

Soit $0 \leq i < j$ et $(y_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. Pour tout $i \leq n \leq j-1$,

$$K(x_n, x_{n+1}) - \lambda\, T(x_n, x_{n+1}) + u(x_{n+1}) = u(x_n),$$

$$K(y_n, y_{n+1}) - \lambda\, T(y_n, y_{n+1}) + u(y_{n+1}) \leq u(y_n).$$

Additionnons ces équations et utilisons l'égalité $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=i}^{j-1} [K(y_n, y_{n+1}) - \lambda\, T(y_n, y_{n+1})] &\leq u(y_i) - u(y_j) \\
&= u(x_i) - u(x_j) \\
&= \sum_{n=i}^{j-1} [K(x_n, x_{n+1}) - \lambda\, T(x_n, x_{n+1})].
\end{aligned}$$

8 Démonstration de la proposition 2

Soit $u \in C^0(X)$ une fonction propre de (K,T) et $u' \in C^0(X)$ une fonction propre de (K',T'). Choisissons $x_0 \in \operatorname{argmax}_{x\in X}\{u(x)+u'(x)\}$. Il existe $x_1 \in X$ tel que

$$K(x_0,x_1) - \lambda T(x_0,x_1) + u(x_1) = u(x_0).$$

Remarquons que

$$K'(x_1,x_0) - \lambda' T'(x_1,x_0) + u'(x_0) \leq u'(x_1).$$

Soustrayons ces deux lignes. On obtient

$$(\lambda - \lambda')T(x_0,x_1) \leq u(x_1) + u'(x_1) - u(x_0) - u'(x_0) \leq 0,$$

donc $\lambda - \lambda' \leq 0$ et $\lambda \leq \lambda'$. Si l'on échange (K,T) et (K',T'), on obtient $\lambda' \leq \lambda$. Donc $\lambda = \lambda'$.

9 Démonstration du théorème 3

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule (2),

$$\lambda = \max_{(x_n)\in X^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(x_n,x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(x_n,x_{n+1})},$$

$$\lambda_p = \max_{(y_n)\in X_p^{\mathbb{N}}} \limsup_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} K(y_n,y_{n+1})}{\sum_{n=0}^{N-1} T(y_n,y_{n+1})}.$$

D'un côté, $X_p \subset X$, donc il est clair que $\lambda \geq \lambda_p$. D'un autre côté, soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. D'après la définition de h_p, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in X_p$ tel que $d(x_n,y_n) \leq h_p$. Mais les fonctions K et T sont lipschitziennes, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|K(x_n,x_{n+1}) - K(y_n,y_{n+1})| \leq C_K h_p$ et $|T(x_n,x_{n+1}) - T(y_n,y_{n+1})| \leq C_T h_p$. Pour simplifier, posons $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $K_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} K(x_n,x_{n+1})$ et de même pour $T_N(x)$. Alors pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{K_N(x)}{T_N(x)} - \frac{K_N(y)}{T_N(y)}\right| &= \left|\frac{[K_N(x)-K_N(y)]T_N(y) + K_N(y)[T_N(y)-T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)}\right| \\
&\leq \left|\frac{K_N(x)-K_N(y)}{T_N(x)}\right| + \left|\frac{K_N(y)[T_N(y)-T_N(x)]}{T_N(x)T_N(y)}\right| \\
&\leq \frac{NC_K h_p}{N\delta_T} + \frac{N\|K\| \times NC_T h_p}{(N\delta_T)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\limsup_{N\to+\infty} \frac{K_N(x)}{T_n(x)} &\leq \limsup_{N\to+\infty} \frac{K_N(y)}{T_N(y)} + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2}\right) h_p \\
&\leq \lambda_p + \left(\frac{C_K}{\delta_T} + \frac{\|K\|C_T}{(\delta_T)^2}\right) h_p.
\end{aligned}$$

Mais $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ était arbitraire. On obtient donc la seconde inégalité du théorème 3.

10 Démonstration alternative de l'existence : la méthode du coût actualisé

Lemme 1 *Pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $v_{\alpha,\lambda} \in C^0(X)$ tel que*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + \alpha\, v_{\alpha,\lambda}(y)\} = v_{\alpha,\lambda}(x)\,.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $v \in C^0(X)$ et $x \in X$, posons

$$(\mathcal{K}v)(x) = \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + \alpha\, v(y)\}.$$

Puisque K et T sont uniformément continus, $\mathcal{K}$ envoie $C^0(X)$ dans $C^0(X)$. Pour tout $v_1, v_2 \in C^0(X)$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}v_1)(x) - (\mathcal{K}v_2)(x) &\le \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + \alpha(v_1(y) - v_2(y)) + \alpha v_2(y)\} \\ &\quad - \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + \alpha v_2(y)\} \\ &\le \alpha\|v_1 - v_2\|.\end{aligned}$$

Donc par symétrie, $\|\mathcal{K}v_1 - \mathcal{K}v_2\| \le \alpha\|v_1 - v_2\|$. Puisque $\alpha \in]0,1[$, le théorème du point fixe de Banach montre qu'il existe $v_{\alpha,\lambda} \in C^0(X)$ tel que $\mathcal{K}v_{\alpha,\lambda} = v_{\alpha,\lambda}$.

Lemme 2 *Soit $x_0 \in X$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $u_\alpha \in C^0(X)$ qui vérifie $u_\alpha(x_0) = 0$ et*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda_\alpha T(x,y) + \alpha u_\alpha(y)\} = u_\alpha(x). \tag{10}$$

De plus,

$$\lambda_\alpha = \max_{(x_n)_{n\ge 1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}\,. \tag{11}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, choisissons $v_{\alpha,\lambda}$ comme dans le lemme 1 et posons $u_{\alpha,\lambda} = v_{\alpha,\lambda} - v_{\alpha,\lambda}(x_0)$ et $r_{\alpha,\lambda} = (1-\alpha)\, v_{\alpha,\lambda}(x_0)$. Alors le lemme 1 montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in X$,

$$\max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + \alpha\, u_{\alpha,\lambda}(y)\} = r_{\alpha,\lambda} + u_{\alpha,\lambda}(x).$$

Ceci implique que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$r_{\alpha,\lambda} = (1-\alpha) \max_{(x_n)_{n\ge 1}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \right\}. \tag{12}$$

En effet, pour tout $(x_n)_{n\geq 1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K(x_n, x_{n+1}) - \lambda T(x_n, x_{n+1}) + \alpha\, u_{\alpha,\lambda}(x_{n+1}) \leq r_{\alpha,\lambda} + u_{\alpha,\lambda}(x_n)\,. \tag{13}$$

Multiplions cette équation par α^n, faisons la somme et utilisons le fait que $u_{\alpha,\lambda}(x_0) = 0$. On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1}) - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{r_{\alpha,\lambda}}{1-\alpha}\,, \tag{14}$$

et il y a égalité si $(x_n)_{n\geq 1}$ est choisi de sorte qu'il y ait égalité dans (14) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci démontre (13).

Notons que (13) montre que l'application $\lambda \mapsto r_{\alpha,\lambda}$ est convexe (donc continue) et décroissante, puisque c'est l'enveloppe supérieure de fonctions linéaires décroissantes de λ. De plus, $r_{\alpha,\lambda} < 0$ pour $\lambda > \|K\|/\delta_T$ et $r_{\alpha,\lambda} > 0$ pour $\lambda < K(x_0,x_0)/T(x_0,x_0)$. Donc il existe $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_{\alpha,\lambda_\alpha} = 0$. Posons $u_\alpha = u_{\alpha,\lambda_\alpha}$. Alors u_α vérifie (11). Et (15) implique que pour tout $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$\lambda_\alpha \geq \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n K(x_n, x_{n+1})}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n T(x_n, x_{n+1})}\,,$$

avec égalité si $(x_n)_{n\geq 1}$ est choisi tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} \in \operatorname*{argmax}_{y\in X} \{K(x_n, y) - \lambda_\alpha T(x_n, y) + \alpha u_\alpha(y)\}.$$

Lemme 3 *Soit $x_0 \in X$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^0(X)$ tel que $u(x_0) = 0$, $\lim_{\alpha\to 1^-} \lambda_\alpha = \lambda$ et*

$$\forall x \in X, \quad \max_{y\in X}\{K(x,y) - \lambda T(x,y) + u(y)\} = u(x). \tag{15}$$

Démonstration. Tout d'abord, la formule (12) implique que pour tout $\alpha \in]0,1[$, $|\lambda_\alpha| \leq \|K\|/\delta_T$. Montrons que la famille $(u_\alpha)_{\alpha\in(0,1)}$ est équicontinue. Soit $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque les fonctions K et T sont uniformément continues, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d(x,x') \leq \eta$ implique

$$\max_{y\in X} |K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon, \quad \max_{y\in X} |T(x,y) - T(x',y)| \leq \varepsilon.$$

Si $d(x,x') \leq \eta$, alors pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} u_\alpha(x) - u_\alpha(x') &= \max_{y\in X}\{K(x,y) - K(x',y) - \lambda_\alpha(T(x,y) - T(x',y)) \\ &\quad + K(x',y) - \lambda_\alpha T(x',y) + \alpha\, u_\alpha(y)\} \\ &\quad - \max_{y\in X}\{K(x',y) - \lambda_\alpha T(x',y) + \alpha u_\alpha(y)\} \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|K\|}{\delta_T}\,\varepsilon, \end{aligned}$$

et par symétrie, $|u_\alpha(x) - u_\alpha(x')| \leq \varepsilon(1 + \|K\|/\delta_T)$. Donc la famille $(u_\alpha)_{\alpha\in]0,1[}$ est équicontinue.

Montrons que la famille $(u_\alpha)_{\alpha\in]1/2,1[}$ est uniformément bornée. Avec (11), on voit que pour tout $\alpha \in]1/2, 1[$ et $y \in X$,

$$K(x_0, y) - \lambda_\alpha T(x_0, y) + \alpha\, u_\alpha(y) \leq u_\alpha(x_0) = 0.$$

Donc $u_\alpha(y) \leq 2\|K\|(1+\|T\|/\delta_T)$. De (11), il résulte aussi que pour tout $x \in X$,

$$u_\alpha(x) \geq K(x, x_0) - \lambda_\alpha\, T(x, x_0) + \alpha\, u_\alpha(x_0) = K(x, x_0) - \lambda_\alpha\, T(x, x_0)\,.$$

Donc $u_\alpha(x) \geq -\|K\|(1 + \|T\|/\delta_T)$. Ainsi $(u_\alpha)_{\alpha\in]1/2,1[}$ est uniformément borné.

Soit (α_n) une suite dans l'intervalle $]1/2, 1[$ telle que $\alpha_n \to 1^-$ quand $n \to +\infty$. Par les théorèmes de Bolzano et d'Ascoli, il existe une sous-suite, encore notée (α_n), $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^0(X)$ tels que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{\alpha_n} = \lambda$ et (u_{α_n}) converge uniformément vers u. Prenons la limite dans (11) : on obtient (16). Puisque $u_\alpha(x_0) = 0$ pour tout α, on a aussi $u(x_0) = 0$. Enfin, le fait que $\lim_{\alpha\to1^-} = \lambda$ (et pas seulement pour une sous-suite) résulte de l'unicité de λ qui vérifie (16), qui a été démontrée dans la section 5.

Références

[1] E.J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces, Wiley, Chichester, 1987.

[2] N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of minplus eigenvalue problems, Frenkel-Kontorova models and homogenization of Hamilton-Jacobi equations, Math. Model. Numer. Anal. 35 (2001) 1185-1195.

[3] N. Bacaër, Modèles mathématiques pour l'optimisation des rotations, Comptes Rendus de l'académie d'agriculture de France 89, no. 3 (2003) p. 52.

[4] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, Synchronization and linearity, Wiley, Chichester, 1992.

[5] V. Bangert, Mather sets for twist maps and geodesics on tori, in : U. Kirchgraber, H.O Walter (éd.), Dynamics Reported, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1988, p. 1-56.

[6] V. Bangert, Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994) 49-63.

[7] W. Chou, R.J. Duffin, An additive eigenvalue problem of physics related to linear programming, Adv. in Appl. Math. 8 (1987) 486-498.

[8] W. Chou, R. Griffiths, Ground states of one-dimensional systems using effective potentials, Phys. Rev. B 34 (1986) 62196234.

[9] J. Cochet-Terrasson, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J.-P. Quadrat, Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998, `http://amadeus.inria.fr/gaubert/papers.html`.

[10] R.A. Cuninghame-Green, Minimax Algebra, Springer, Berlin, 1979.

[11] G.B. Dantzig, W.O. Blattner, M.R. Rao, Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 77-83.

[12] A. Fathi, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, C.R. Acad. Sci. Paris I 324 (1997) 1043-1046.

[13] V.N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[14] E.L. Lawler, Optimal cycles in doubly weighted directed linear graphs, in : Theory of Graphs, International Symposium, Gordon and Breach, New York, 1967, p. 209-213.

[15] O. Hernandez-Lerma, J.B. Lasserre, Discrete-time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1996.

[16] O. Hernandez-Lerma, J.B. Lasserre, Further Topics on Discrete-time Markov Control Processes, Springer, Berlin, 1999.

[17] S.T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Springer, Berlin, 1998.

[18] S.Yu. Yakovenko, L.A. Kontorer, Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization, in : V.P. Maslov, S.N. Samborski (Eds.), Idempotent Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 167-210.