疫情峰值的新特性

N. Bacaër, F. Hamelin, H. Inaba, De nouvelles propriétés du pic épidémique. Quadrature 119 (2021)

Nicolas Bacaër[1], Frédéric Hamelin[2], Hisashi Inaba[3]

[1] Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes
Institut de recherche pour le développement
Paris, France
nicolas.bacaer@ird.fr

[2] Institut de génétique, environnement et protection des plantes
Institut national de recherche pour l'agriculture, l'alimentation et l'environnement
Rennes, France

[3] 数学系
东京大学
日本东京

摘要

我们研究的是以S-I-R或S-E-I-R型微分系统为模型的流行病。对于S-I-R模型，表明疫情高峰日期并不总是接触率的递减函数。对于S-E-I-R模型，当人口N很大时，新的证据支持了流行高峰发生在时间T的猜想，$T \sim (\log N)/\lambda$，其中λ是线性化系统中最大的特征值。

1. 介紹

在[2]中，我们开始研究Kermack和McKendrick S-I-R模型中的流行高峰日期[1，第18章]

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = aS\frac{I}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI,$$

在$a > b$且人口N多的情况下。变量$S(t)$为未感染者人数，$I(t)$为感染者人数，$R(t)$为脱离传播的人数。总人口$N = S + I + R$为常数。参数a为有效接触率，b为感染者停止感染的速度。当人口N较多时，流行高峰（对应I的最大值）出现在时间T

$$T \sim \frac{\log N}{\lambda}, \quad \lambda = a - b.$$

换言之，λ为流行初期线性化 $dI/dt \simeq (a-b)I$系统中感染者数量的增长率，此时$S \simeq N$.

在[3]中，曾简单推测，在S-E-I-R模型中，峰值日期的等效值在$(\log N)/\lambda$中是相同的，该模型包括了感染者成为感染者之前的一个潜伏阶段(表示为E)

$$\frac{dS}{dt} = -aS\frac{I}{N}, \tag{1}$$
$$\frac{dE}{dt} = aS\frac{I}{N} - bE, \tag{2}$$
$$\frac{dI}{dt} = bE - cI, \tag{3}$$
$$\frac{dR}{dt} = cI, \tag{4}$$

其中$a > c$。对于λ，取流行初期线性化系统的最大特征值，即矩阵的最大特征值

$$M = \begin{pmatrix} -b & a \\ b & -c \end{pmatrix}.$$

在[7]中，Piovella也考察了S-E-I-R模型中a/c比值接近1时的流行高峰日期，但从数学角度看，他的近似值并不完全合理。

在第2节中，我们首先回顾一下[5，第2章]对S-I-R模型的一个明显被遗忘的结果(包括在[2]中)，T的渐进发展

$$T = \frac{\log \frac{N}{I(0)} + f(\mathcal{R}_0)}{\lambda} + o(1), \quad N \to +\infty,$$

$\mathcal{R}_0 = a/b$为传染值，$\lambda = a - b$为增长率，f为相当复杂的函数。这个结果似乎没有出现在自[5]以来发表的任何一本书或文章中，这对于如此简单而著名的模型来说，有点令人惊讶。

第2节其余部分显示：

$$f(\mathcal{R}_0) = \log\left[2(\mathcal{R}_0 - 1)^2\right] + o(1), \quad \mathcal{R}_0 \to 1^+.$$

可以推断，疫情高峰日期并不总是有效接触率a的递减函数，只有在传染值接近1的情况下才会出现这种情况，高峰日期达到最大值，此时：

$$\mathcal{R}_0 \simeq 1 + \mathrm{e}\sqrt{\frac{I(0)}{2N}},$$

其中，e是奈培尔对数的基数。这个观点似乎很新颖。

在第三节中，我们转而讨论S-E-I-R模型。我们回顾一下关于疫情最终规模的情况。在这个框架中具体说明什么叫流行高峰，即$E+I$达到最大值的点。我们发现这个峰值的新下限与渐变行为的猜想相一致。本文提出了一些模拟来说明这一猜想。

2. S-I-R模式

2.1 T的积分表达式

对于S-I-R模型，假设

$$S(0)=N-i,\quad I(0)=i,\quad R(0)=0,$$

其中$0<i<N$。假设$a>b$，N足够大，$a(1-i/N)>b$，即$\frac{dI}{dt}(0)>0$。如[2]中（我们曾取$i=1$），我们有

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}=-\frac{a}{bN}\frac{dR}{dt}\quad,\quad \log\frac{S(t)}{S(0)}=-\frac{a}{bN}R(t).$$

所以

$$\frac{dS}{dt}=-a\frac{S}{N}(N-S-R)=-a\frac{S}{N}\left(N-S+\frac{bN}{a}\log\frac{S(t)}{S(0)}\right).$$

$I(t)$的峰值出现在时间T，其中$dI/dt=0$，当$S=Nb/a$时出现。由此我们可以推断出

$$T=\frac{1}{a}\int_{b/a}^{1-i/N}\frac{ds}{s\big(1-s+\frac{b}{a}\log s-\frac{b}{a}\log(1-i/N)\big)}. \tag{5}$$

2.2 当 $N\to+\infty$时的Lauwerier公式

我们定义 $\varepsilon=-\frac{b}{a}\log(1-\frac{i}{N})$. 用[5，p.12]中的技巧，我们有 $T=T_1+T_2$与

$$T_1=\frac{1}{a}\int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon-s+\frac{b}{a}\log s}-\frac{1}{\varepsilon-(1-\frac{b}{a})\log s}\right)\frac{ds}{s},$$
$$T_2=\frac{1}{a}\int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}}\frac{ds}{s\big(\varepsilon-(1-\frac{b}{a})\log s\big)}.$$

简化到同一分母，

$$T_1=\frac{1}{a}\int_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}}\frac{-1+s-\log s}{[\varepsilon-(1-\frac{b}{a})\log s](1+\varepsilon-s+\frac{b}{a}\log s)}\frac{ds}{s}.$$

我们有 $\varepsilon\sim\frac{b}{a}\frac{i}{N}\to 0$ 如果 $N\to+\infty$. 让我们观察一下，当我们正式传递到极限时，会出现的积分是 $N\to+\infty$

$$\int_{\frac{b}{a}}^{1}\frac{-1+s-\log s}{-(\log s)(1-s+\frac{b}{a}\log s)}\frac{ds}{s}$$

是$s=1$中的一个先验的广义积分。但在$s=1$的情况下，综合函数由连续性扩展，因为

$$\log s=s-1-\frac{(s-1)^2}{2}+o((s-1)^2)$$

在$s=1$的附近，所以说

$$\frac{-1+s-\log s}{-(\log s)(1-s+\frac{b}{a}\log s)s}\quad\underset{s\to1}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{2(1-b/a)}.$$

特别是，这个积分是收敛的。由此可以推断（见附录1）

$$T_1=\frac{1}{a-b}\int_{\frac{b}{a}}^{1}\frac{-1+s-\log s}{-(\log s)(1-s+\frac{b}{a}\log s)}\frac{ds}{s}+o(1).$$

随着变量$s=e^{-u}$的变化

$$T_1=\frac{1}{a-b}\int_0^{\log\frac{a}{b}}\frac{-1+e^{-u}+u}{u(1-e^{-u}-\frac{b}{a}u)}du+o(1).$$

此外，积分T_2是明确计算的 。

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{\log\left\{-\frac{b}{a}\log(1-\frac{i}{N})-(1-\frac{b}{a})\log s\right\}}{-(1-\frac{b}{a})}\right]_{\frac{b}{a}}^{1-\frac{i}{N}} \\
&= \frac{1}{a-b}\left\{\log\left[-\frac{b}{a}\log\left(1-\frac{i}{N}\right)-\left(1-\frac{b}{a}\right)\log\frac{b}{a}\right]-\log\left[-\log\left(1-\frac{i}{N}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\log\frac{N}{i}+\log[(1-\frac{b}{a})\log\frac{a}{b}]}{a-b}+o(1).
\end{aligned}
$$

把这两个结果加在一起，我们就可以得到可以称为Lauwerier公式[5，p.13]

$$
T=\frac{1}{a-b}\left\{\log\frac{N}{i}+\log\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)\log\frac{a}{b}\right]+\int_0^{\log\frac{a}{b}}\frac{-1+e^{-u}+u}{u(1-e^{-u}-\frac{b}{a}u)}du\right\}+o(1),
$$

或

$$
T=\frac{1}{a-b}\left\{\log\frac{N}{i}+f(\mathcal{R}_0)\right\}+o(1)
$$

其中 $\mathcal{R}_0=a/b>1$.

图1显示了Lauwerier的公式对流行高峰的日期T的近似程度。免费软件Scilab可用于积分的数值计算。参数b的选择，使传染期平均持续$1/b=4$天。

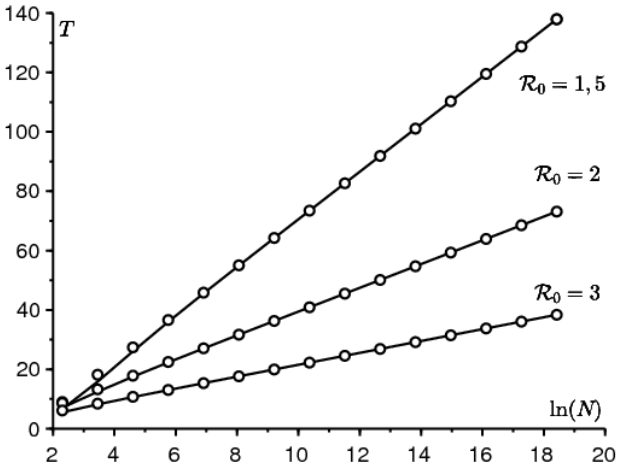

图1. 根据精确公式(5)和Lauwerier的近似公式(小圆圈)，S-I-R模型的流行高峰日期T(自流行开始以来的天数)是$\log N$的函数(实线)。参数值：$I(0)=1$，$b=1/4$每天，$\mathcal{R}_0=a/b\in\{1{,}5;\ 2;\ 3\}$。

注： 劳韦里公式与初始条件保持不变

$$
S(0)=N-i-r,\quad I(0)=i,\quad R(0)=r,
$$

其中$i>0$，$r\geq 0$，$i+r<N$，且$a(1-\frac{i+r}{N})>b$。事实上，假设

$$
\widehat{N}=N-r=N(1-r/N),\quad \widehat{R}(t)=R(t)-r,\quad \hat{a}=a\widehat{N}/N=a(1-r/N).
$$

于是

$$
\frac{dS}{dt}=-\hat{a}S\frac{I}{\widehat{N}},\quad \frac{dI}{dt}=\hat{a}S\frac{I}{\widehat{N}}-bI,\quad \frac{d\widehat{R}}{dt}=bI,
$$

$$
S(0)=\widehat{N}-i,\quad I(0)=i,\quad \widehat{R}(0)=0.
$$

所以

$$
T=\frac{1}{\hat{a}-b}\left\{\log\frac{\widehat{N}}{i}+f(\hat{a}/b)\right\}+o(1),\quad \widehat{N}\to+\infty.
$$

但由于$\widehat{N}\to+\infty$等于$N\to+\infty$，又由于$\hat{a}=a+O(1/N)$，我们回到了

$$
T=\frac{1}{a-b}\left\{\log\frac{N}{i}+f(a/b)\right\}+o(1),\quad N\to+\infty.
$$

2.3 函数$f(\mathcal{R}_0)$的研究

图2显示了$f(\mathcal{R}_0)$随$\mathcal{R}_0$的函数变化的情况。我们注意到， $f(\mathcal{R}_0)$似乎是一个递增函数(这一点并不明显，即使在计算导数时也是如此)，如果$\mathcal{R}_0\simeq 2{,}10$，则$f(\mathcal{R}_0)=0$。

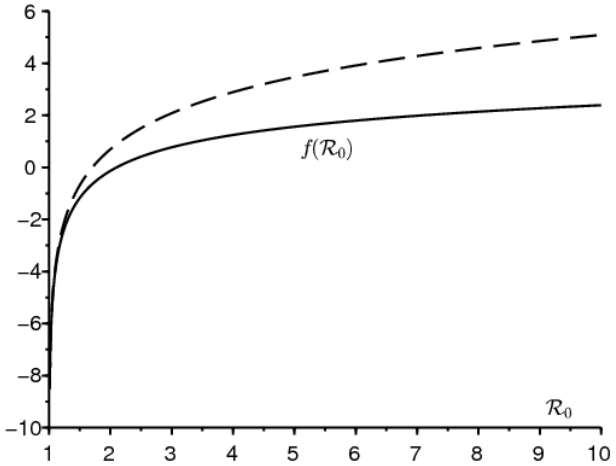

图2.$f(\mathcal{R}_0)$作为$\mathcal{R}_0$的函数(实线)和$\mathcal{R}_0=1$附近的近似(6)(虚线)。

随着 $\mathcal{R}_0 \to 1^+$, 我们有 $\log \mathcal{R}_0 = (\mathcal{R}_0 - 1)(1 + o(1))$

$$\log\left[\left(1-\frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)\log \mathcal{R}_0\right] = \log\left[(\mathcal{R}_0-1)^2\right] + o(1) = 2\log(\mathcal{R}_0-1) + o(1).$$

在$u=0^+$附近。

$$\begin{aligned}\frac{-1+e^{-u}+u}{u(1-e^{-u}-u/\mathcal{R}_0)} &= \frac{u^2/2+o(u^2)}{u(u-u^2/2+o(u^2)-u/\mathcal{R}_0)}\\ &= \frac{1+o(1)}{2(1-1/\mathcal{R}_0)-u+o(u)}.\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\int_0^{\log \mathcal{R}_0} \frac{du}{2(1-1/\mathcal{R}_0)-u} &= \Big[-\log\{2(1-1/\mathcal{R}_0)-u\}\Big]_0^{\log \mathcal{R}_0}\\ &= -\log\frac{2(1-1/\mathcal{R}_0)-\log \mathcal{R}_0}{2(1-1/\mathcal{R}_0)}\\ &= -\log\Big[1-\frac{\log \mathcal{R}_0}{2(1-1/\mathcal{R}_0)}\Big]\\ &\underset{\mathcal{R}_0\to 1^+}{\longrightarrow} -\log(1/2) = \log 2\end{aligned}$$

据此推断（见附录2）：

$$f(\mathcal{R}_0) = \log\Big[2(\mathcal{R}_0-1)^2\Big] + o(1), \quad \mathcal{R}_0 \to 1^+. \tag{6}$$

这个近似值与[2, p.11]中提出的从Kermack和McKendrick对S-I-R模型的(非严格的)近似值，当$\mathcal{R}_0$接近1时的近似值相吻合。

2.4 峰日期不是接触率的单调函数

因此，当N大，$\mathcal{R}_0$接近1时，且$N(\mathcal{R}_0-1)^2$不小

$$T \simeq \frac{\log\left[(N/i)2(a/b-1)^2\right]}{a-b}.$$

于是

$$\frac{\partial T}{\partial a} \simeq \frac{2-\log\left[(N/i)2(a/b-1)^2\right]}{(a-b)^2}.$$

我们注意到，$\frac{\partial T}{\partial a} \simeq 0$，如果

$$\frac{a}{b} \simeq 1 + \mathrm{e}\sqrt{\frac{i}{2N}}.$$

在这个a的值下，请注意它的a^*，T的最大值对应的值是

$$T_{\max} \simeq \frac{2}{a^*-b} = \frac{2}{b\,\mathrm{e}}\sqrt{\frac{2N}{i}}.$$

因此，峰值的日期并不像人们想象的那样，是接触率的单调递减函数。图3用一些数字实例说明了这一点。

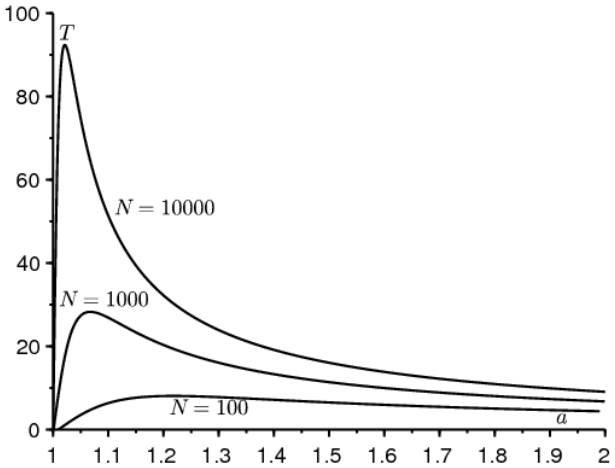

图3. 根据精确公式(5)求出疫情高峰日期T，为接触率a的函数，若$i=1$，且$N\in\{100;\,1000;\,10000\}$，则$a>b/(1-i/N)$。我们选择时间单位$b=1$。

3. S-E-I-R系统

现在考虑S-E-I-R（1）-（4）系统。我们假设$N>0$，$a>0$，$b>0$，$c>0$。还假设$a>c$。初始条件是

$$S(0)=N-n_E-n_I>0,\quad E(0)=n_E\geq 0,\quad I(0)=n_I\geq 0,\quad R(0)=0,$$

其中 $n_E+n_I>0$. 我们已经得到了

$$S(t)+E(t)+I(t)+R(t)=N,\quad \forall t>0, \tag{7}$$

$S(t)>0$, $E(t)>0$, $I(t)>0$, $R(t)>0$.

3.1 疫情的最终规模

根据式(1)，函数$S(t)$是递减的，且为正值，所以它收敛到一个极限S_∞。根据式(4)，函数$R(t)$是递增的，且小于N，所以它收敛到一个极限R∞。由于函数$E(t)$和$I(t)$受N约束，如果$t\in(0;+\infty)$，根据式(3)，函数dI/dt也受约束，根据式(4)，d^2R/dt^2也受约束。因此，当$t\to+\infty$时，函数$R(t)$是收敛的，有一个有界的二次导数；因此 $dR/dt\to 0$(如见[4，二3.21]或附录3)。由式（4）可知，$I(t)\to 0$。根据式(2)，函数dE/dt有界，根据式(3)，d^2I/dt^2也有界。所以dI/dt→0如前。根据式（2），$E(t)\to 0$。通过式(7)，我们在极限处得到 $S_\infty+R_\infty=N$。根据公式(1)和(4)：

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{cN}{aS}\frac{dS}{dt}.$$

所以

$$R(t)=-\frac{cN}{a}\log\frac{S(t)}{S(0)}. \tag{8}$$

在极限情况下，我们推导出$S_\infty>0$，并且是

$$S_\infty=N-R_\infty=N+\frac{cN}{a}\log\frac{S_\infty}{S(0)}.$$

我们定义 $x_\infty=S_\infty/N$, $x_0=S(0)/N$,

$$g(x)=1-x+\frac{c}{a}\log\frac{x}{x_0}.$$

所以我们有 $g(x_\infty)=0$ et $0<x_\infty\leq 1$. 但是

$$\begin{aligned}&g'(x)=-1+\frac{c}{ax}>0, && 0<x<c/a,\\ &g'(x)<0, && c/a<x<1.\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}&g(1)=\frac{c}{a}\log\frac{1}{x_0}>0,\\ &g(x)\to-\infty, \qquad x\to 0^+,\\ &g(c/a)=1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\log\frac{c/a}{x_0}>1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\log\frac{c}{a}>0.\end{aligned}$$

后一个不等式来自于假设$c/a<1$，以及函数$h(u)=1-u+u\log u$，此函数如果$\forall u\in(0;1)$, $h'(u)=\log u<0$,$h(1)=0$，则 $\forall u\in(0;1)$, $h(u)>0$.

因此，函数g在区间$(0, c/a)$上从-∞增加到 $g(c/a) > 0$，然后在区间$(c/a, 1)$上从$g(c/a) > 0$减少到$g(1) > 0$.因此，方程$g(x) = 0$在区间$(0; 1)$上有一个单解，这个解在$(0; c/a)$. 结论是：

$$0 < S_\infty/N < c/a.$$

3.2 疫情高峰

我们先来明确一下我们对疫情高峰的定义。我们有

$$\frac{d}{dt}(E + I) = (aS/N - c)I. \tag{9}$$

假设

$$S(0)/N = 1 - (n_E + n_I)/N > c/a.$$

在假设$a > c$的情况下，只要N足够大，这个不等式就会成立。我们有$I(t) > 0 \forall t > 0$。函数S是严格递减的，在区间[0;+∞)上从$S(0) > Nc/a$递减到$S_\infty < Nc/a$。因此有一个$T > 0$，$S(T) = Nc/a$。根据式(9)，函数$E + I$在区间$[0; T]$上严格递增，在区间$[T; +\infty[$上严格递减。T称为流行高峰。应该指出的是，它一般既不符合I的最大值，也不符合E的最大值。

根据式(8)，我们还可以得到

$$E(T) + I(T) = N - S(T) - R(T) = N - S(T) + \frac{cN}{a}\log\frac{S(T)}{S(0)}. \tag{10}$$

因为$S(T) = Nc/a$，所以我们有了

$$E(T) + I(T) = N\left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c}{a}\log\frac{Nc}{a\,S(0)}\right),$$

正如Hethcote在[6，第35页]中已经指出的那样。

3.3 下层终端

由于$S/N \le 1$，我们有

$$\frac{dE}{dt} \le -bE + aI$$
$$\frac{dI}{dt} = bE - cI.$$

在下文中，向量之间的不等式≤是指所有分量的不等式。我们回顾一下准单调系统的比较定理（例如见[8，附录E]或附录4）

若$d \ge 2$为整数，若$F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$、$X \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$和$Y \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$验证

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \ge 0 \quad \forall i \ne j, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\\
&\frac{dX}{dt} - F(X(t)) \le \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) \quad \forall t > 0,\\
&X(0) \le Y(0),
\end{aligned}$$

那么 $X(t) \le Y(t) \quad \forall t > 0$.

让M成为引言中定义的矩阵。我们选择$d = 2$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix}, \quad Y(t) = e^{tM}\begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix}, \quad F(x) = Mx.$$

我们已经得到了

$$\frac{dX}{dt} - F(X(t)) \le 0 = \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) \quad \forall t > 0,$$

$X(0) = Y(0)$ 并对F进行假设检验，因为矩阵M的非对角线系数为正。所以

$$\begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix} \le e^{tM}\begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix}, \quad \forall t \ge 0.$$

明确计算矩阵e^{tM}的指数[9，陈述6]，矩阵M的特征值，为

$$\lambda_\pm = \frac{-b - c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4ab}}{2}.$$

得

$$e^{tM}=\begin{pmatrix}\frac{e^{\lambda_+t}+e^{\lambda_-t}}{2}+\frac{c-b}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}}\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}}{2} & \frac{a\left(e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}\right)}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}}\\ \frac{b\left(e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}\right)}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}} & \frac{e^{\lambda_+t}+e^{\lambda_-t}}{2}+\frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}}\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}}{2}\end{pmatrix}\quad \forall t\geq 0.$$

我们推断

$$\begin{aligned}E(T)+I(T)&\leq (1\quad 1)\,e^{TM}\begin{pmatrix}n_E\\ n_I\end{pmatrix}\\ &\leq\left(\frac{e^{\lambda_+T}+e^{\lambda_-T}}{2}+\frac{b+c}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}}\frac{e^{\lambda_+T}-e^{\lambda_-T}}{2}\right)n_E\\ &\quad+\left(\frac{e^{\lambda_+T}+e^{\lambda_-T}}{2}+\frac{2a+b-c}{\sqrt{(b-c)^2+4ab}}\frac{e^{\lambda_+T}-e^{\lambda_-T}}{2}\right)n_I.\end{aligned}$$

因为$\lambda_-<\lambda_+$，有一个常数$k>0$，它取决于a、b、c、n_E和n_I(但不取决于N)，所以

$$E(T)+I(T)\leq k\,e^{\lambda_+T}.$$

但（10）表明

$$E(T)+I(T)=N\Big(1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\log(c/a)\Big)-\frac{cN}{a}\log(S(0)/N).$$

因为$S(0)/N<1$，所以我们得到了

$$N\Big(1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\log(c/a)\Big)\leq E(T)+I(T)\leq k\,e^{\lambda_+T}.$$

因此又有一个常数$K\in\mathbb{R}$，它取决于a、b、c、n_E和n_I（但不取决于N），如

$$T\geq\frac{\log N}{\lambda_+}+K.$$

这个下限与猜想是一致的

$$T\sim\frac{\log N}{\lambda_+},\quad N\to+\infty.$$

3.4 例子

我们选择$b=1/3$每天，$c=1/4$每天，$n_E=1$，$n_I=0$，接触率a的三个值，使$a/c\in\{1,5\,;\,2\,;\,3\}$。因此，一个平均持续4天的传染期之后，就是一个平均持续3天的潜伏期。N人口在10^2到10^8之间取了各种数值。我们对微分系统进行了求解(用免费软件Scilab)，找到了对应于$E+I$最大值的峰值T。图4显示了T作为$\log N$的函数的变化情况（实线）。它还显示了$(\log N)/\lambda_+$(小圆圈)。坡度似乎是吻合的，如猜想中的。该图还表明，T的渐变发展中的下一个项仍然是一个常数，当a/c接近1时，该项为负数，当a/c比值增大时，该项变为正数。根据模型的参数确定这个常数似乎是一个难题。

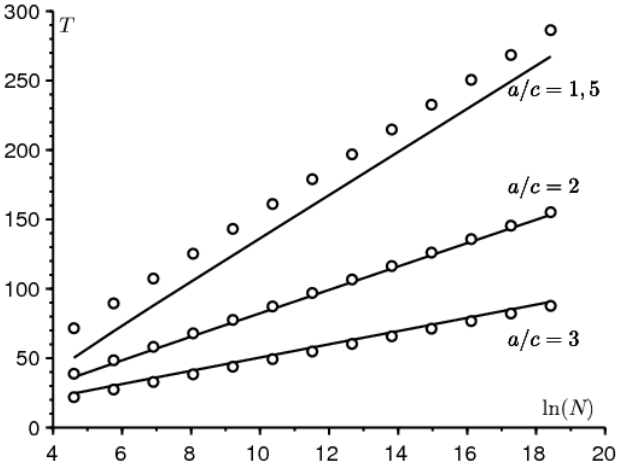

图4. S-E-I-R模型的流行高峰日期T与数值模拟的$\log N$的函数关系（实线）和$(\log N)/\lambda_+$（小圆圈）。

附录1

随着$b/a<s<1$，我们定义了

$$\psi_\varepsilon(s) = \frac{1}{a}\,\frac{-1+s-\log s}{[\varepsilon-(1-\frac{b}{a})\log s](1+\varepsilon-s+\frac{b}{a}\log s)s}\,,$$
$$\psi(s) = \frac{-1+s-\log s}{-(a-b)(\log s)(1-s+\frac{b}{a}\log s)s}\,.$$

我们有：$0<\psi_\varepsilon(s)<\psi(s)$。我们在2.2节看到，$\int_{b/a}^1 \psi(s)\,ds$ 是一个收敛积分。根据主导收敛定理

$$\int_{b/a}^1 \psi_\varepsilon(s)\,ds \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{b/a}^1 \psi(s)\,ds.$$

另外

$$0 \le \int_{1-i/N}^1 \psi_\varepsilon(s)\,ds \le \int_{1-i/N}^1 \psi(s)\,ds \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

所以

$$\int_{b/a}^{1-i/N} \psi_\varepsilon(s)\,ds = \int_{b/a}^1 \psi_\varepsilon(s)\,ds - \int_{1-i/N}^1 \psi_\varepsilon(s)\,ds \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{b/a}^1 \psi(s)\,ds.$$

附录2

我们定义

$$\phi(u) = \frac{-1+e^{-u}+u}{u(1-e^{-u}-u/\mathcal{R}_0)} - \frac{1}{2(1-1/\mathcal{R}_0)-u}.$$

我们要表明

$$\int_0^{\log\mathcal{R}_0} \phi(u)\,du \underset{\mathcal{R}_0\to1^+}{\longrightarrow} 0.$$

简化成相同的分母，我们注意到

$$\phi(u) = (1-1/\mathcal{R}_0)\,\frac{e^{-u}-1+u-u^2/2}{u\,(1-e^{-u}-u/\mathcal{R}_0)\,(1-1/\mathcal{R}_0-u/2)}\,.$$

根据泰勒和拉格朗日的公式：

$$\forall u>0,\ \exists\theta\in]0,1[,\ e^{-u} = 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}\,e^{-\theta u}.$$

所以 $\forall u>0$,

$$\left|e^{-u}-1+u-\frac{u^2}{2}\right| \le \frac{u^3}{6}.$$

$$\begin{aligned}1-e^{-u}-u/\mathcal{R}_0 &= u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\,e^{-\theta u}-u/\mathcal{R}_0\\ &> u-\frac{u^2}{2}-u/\mathcal{R}_0 = u(1-1/\mathcal{R}_0-u/2).\end{aligned}$$

我们注意到，对于$0<u<\log\mathcal{R}_0$,

$$1-1/\mathcal{R}_0-u/2 > 1-1/\mathcal{R}_0-(\log\mathcal{R}_0)/2 \underset{\mathcal{R}_0\to1^+}{\sim} (\mathcal{R}_0-1)/2 > 0.$$

当$\mathcal{R}_0$接近1时，有$1-1/\mathcal{R}_0-(\log\mathcal{R}_0)/2>0$。因此：

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\log\mathcal{R}_0}\phi(u)\,du\right| &\le \frac{1-1/\mathcal{R}_0}{[1-1/\mathcal{R}_0-(\log\mathcal{R}_0)/2]^2}\int_0^{\log\mathcal{R}_0}\frac{u}{6}\,du\\ &= \frac{1-1/\mathcal{R}_0}{[1-1/\mathcal{R}_0-(\log\mathcal{R}_0)/2]^2}\,\frac{(\log\mathcal{R}_0)^2}{12} \underset{\mathcal{R}_0\to1^+}{\sim} \frac{\mathcal{R}_0-1}{3} \underset{\mathcal{R}_0\to1^+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

附录3

设$Z:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$为两次可导函数，如当$x\to+\infty$时，$Z(x)\to L$，且$|Z''(x)|\le M\ \forall x>0$。[4，二3.21]表明，当$x\to+\infty$时，$Z'(x)\to0$。实际上，这就是ε>0。 所以

$$\exists x_0>0,\ \forall x>x_0,\ |Z(x)-L|\le\varepsilon^2/(4M).$$

根据泰勒-拉格朗日的公式

$$\forall x>0,\ \forall h>0,\ \exists\theta\in]0,1[,\quad Z(x+h) = Z(x)+hZ'(x)+\frac{h^2}{2}Z''(x+\theta h).$$

得

$$\forall x > x_0,\ \forall h > 0, \quad |Z'(x)| \leq \frac{|Z(x+h) - Z(x)|}{h} + \frac{Mh}{2} \leq \frac{\varepsilon^2}{2Mh} + \frac{Mh}{2}.$$

由于$h = \varepsilon/M$，我们得到$|Z'(x)| \leq \varepsilon\ \forall x > x_0$.

附录4

根据3.3节的定义，我们假设 $U(t) = Y(t) - X(t)$,

$$H(t) = \frac{dY}{dt} - F(Y(t)) - \left[\frac{dX}{dt} - F(X(t))\right].$$

且假设有向量不等式$H(t) \geq 0$。得：

$$\frac{dU}{dt} = H(t) + F(X(t) + U(t)) - F(X(t)) = \phi(t, U(t)),$$

$$\phi_i(t, U(t)) = H_i(t) + \sum_j \left[\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X(t) + s\,U(t))\,ds\right] U_j(t).$$

如果$x_j \geq 0\ \forall j$，且$x_i = 0$，那么由于对函数F的偏导数符号的假设，$\phi_i(t, x) \geq 0$。因此，圆锥$\mathbb{R}_+^d$是一个不变的区域。由于 $U(0) \geq 0$，所以得出$U(t) \geq 0, X(t) \leq Y(t)\ \forall t \geq 0$

鸣谢

我们感谢Ali Moussaoui的报告[7]。

参考书目

1. N. Bacaër : Histoires de mathématiques et de populations, Éditions Cassini, Paris, 2009.
2. N. Bacaër : Sur le pic épidémique dans un modèle S − I − R. Quadrature 117 (2020) 9 − 12. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02518993
3. N. Bacaër : Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom. 15 (2020) 29. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02509142
4. W. J. Kaczor, M. T. Nowak (trad. E. Kouris) : Problèmes d'analyse II. EDP Sciences, Les Ulis (2008)
5. H. A. Lauwerier : Mathematical models of epidemics. Mathematisch Centrum, Amsterdam(1981). https://ir.cwi.nl/pub/12996
6. H. Hethcote : The basic epidemiology models : models, expressions for R0, parameter estimation, and applications. In : S. Ma, Y. Xia (éd.) Mathematical Understanding of Infectious Disease Dynamics, World Scientific, Singapour(2009), p. 1 − 61.
7. N. Piovella : Analytical solution of SEIR model describing the free spread of the COVID − 19 pandemic. Chaos, Solitons and Fractals 140 (2020) 110243.
8. J. W. Prüß, R. Schnaubelt, R. Zacher : Mathematische Modelle in der Biologie. Birkhäuser, Bâle (2008)
9. E. Thomas, Sur l'exponentielle de matrices. Quadrature 116, 2020.